Stochastik

Glege 7/94

1. Einführung

1.1.Begriffe

Vollerhebung	Ein Experiment wird so oft wiederholt, wie Elemente vorhanden sind, d.h. k-Ziehungen von n-Elementen (wobei $k = n$)
Stichprobe	Ein Experiment mit n-Elementen wird k-mal wiederholt (wobei $k < n$)
ungeordnet	Reihenfolge der Ergebnisse ist ohne Bedeutung (z.B. Lotto)
geordnet	Reihenfolge der Ergebnisse ist wichtig (z.B. Zieleinlauf)
stetige Werte	alle Werte innerhalb eines Intervalls z.B. benötigte Zeit für einen 100m Lauf
diskrete Werte	abzählbar viele Werte, z.B. Würfelaugen (d.h. keine Zwischenwerte)

1.2. Formelzeichen

kleine Buchstaben	Elementarereignisse
große Buchstaben	Menge von Elementarereignissen
$P(X)$	Wahrscheinlichkeit, mit der X eintritt
n	Anzahl der Versuchswiederholung
k	Anzahl der Treffer
p	Wahrscheinlichkeit für einen Treffer (Erfolg)
q	Wahrscheinlichkeit für eine Niete (nicht Erfolg)
$V(X)$	Varianz
μ (my) oder $E(X)$	Erwartungswert
s (sigma)	Standardabweichung, Streuungsmaß
e (epsilon)	Umgebung um eine Zahl, Toleranzband
S (großes sigma)	Summenzeichen einer Reihe

2. Binomialkoeffizient

2.1. Binomialkoeffizient (lies: n über k)

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

2.2. Regeln: $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{0}{0} = 1$; $1! = 1$; $0! = 1$

3. Experimente

3.1. Laplace-Verteilung (Gleichverteilung)

Alle Ereignisse treten mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf, z.B. Münze oder Würfel.

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der möglichen Erfolge (A ist eingetreten)}}{\text{Anzahl aller möglichen Ereignisse}}$$

3.2. Bernoulli-Verteilung (Binomialverteilung)

Das Experiment liefert genau zwei Ergebnisse mit den Wahrscheinlichkeiten p für Erfolg und q für nicht Erfolg.

Es gilt: $p + q = 1$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^{k} \cdot q^{n-k}$$

3.3. Hypergeometrische Verteilung

Eine Menge besteht aus N-Elementen. M-Elemente gehören zur Sorte 1, (N-M)-Elemente gehören zur Sorte 2. Die Wahrscheinlichkeit, daß bei n-Ziehungen ohne Zurücklegen k-Elemente von Sorte 1 sind, ist

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

z.B. Stichprobe auf Funktionsfähigkeit von N-Produkten, von denen M funktionieren und N-M defekt sind.

4. Anzahl der Möglichkeiten (Anordnung von *n*-Elementen)

4.1.	$n!$	*n*-geordnete Ziehungen aus *n*-Elementen ohne Zurücklegen, z.B. Zieleinlauf
4.2.	$\frac{n!}{a!\cdot b!\cdot \ldots}$	*n*-geordnete Ziehungen aus *n*-Elementen mit Zurücklegen, wobei die erste Sorte von Elementen *a*-mal, die zweite Sorte *b*-mal usw. vorkommen, z.B. die mögliche Reihenfolge, in der *a* Mädchen und *b* Jungen geboren wurden
4.3.	n^k	*k*-geordnete Ziehungen aus *n*-Elementen mit Zurücklegen, z.B. *k*-mal würfeln, wobei der erste Wurf die Einerziffer, der Zweite die Zehnerziffer einer *k*-stelligen Zahl angibt
4.4.	$n\cdot\ (n-1)\cdot\ (n-2)\cdot\ \ldots\cdot\ (n-k+1)$ $= \frac{n!}{(n-k)!}$	*k*-geordnete Ziehungen aus *n*-Elementen ohne Zurücklegen z.B. Wahl eines Vorsitzenden und dessen erster und zweiter usw. Vertreter
4.5.	$\binom{n+k-1}{k}$	*k*-ungeordnete Ziehungen aus *n*-Elementen mit Zurücklegen, z.B. Berechnung der Summe der geworfenen Augenzahlen beim *k*-maligen Würfeln
4.6.	$\binom{n}{k}$	*k*-ungeordnete Ziehungen aus *n*-Elementen ohne Zurücklegen, z.B. Lotto-Zahlen

5. Begriffe und Berechnungen

5.1. Erwartungswert $E(X)$

oder Mittelwert der Verteilung, der bei häufiger Versuchsdurchführung erreicht wird.
Def.: Ist X eine Zufallsvariable, welche die Werte x_1 bis x_n annehmen kann, so ist der Erwartungswert:

$$E(X) = x_1\cdot\ P(X=x_1) + x_2\cdot\ P(X=x_2) + \ldots + x_n\cdot\ P(X=x_n)$$

Rechenregeln: $E(a\cdot\ X) = a\cdot\ E(X)$ *und* $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$

5.2. Varianz $V(X)$

oder quadrierte Abweichung vom Mittelwert
Def.: Ist X eine Zufallsvariable, welche die Werte x_1 bis x_n annehmen kann, so ist die Varianz

$$V(X) = (x_1-\mu)^2\cdot\ P(X=x_1) + (x_2-\mu)^2\cdot\ P(X=x_2) +\ldots+ (x_n-\mu)^2\cdot\ P(X=x_n)$$

$$V(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - \mu^2\ =\ s^2$$

5.3. Standardabweichung

$s = \sqrt{V(X)}$ Wurzel der Varianz = $V(X)$

5.4. Berechnung bei der hypergeometrischen Verteilung

$E(X) = n \cdot \left(\frac{M}{N} \right)$ $V(X) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N} \right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$

5.5. Berechnung bei der Binomialverteilung

$E(X) = n \cdot p$ $V(X) = n \cdot p \cdot q$

6. Ungleichung von Tschebyscheff

Die Wahrscheinlichkeit, mit der X einen Wert annimmt, der um mindestens c vom Erwartungswert μ abweicht, ist

$$P\left(\left| X - m \right| \geq c \right) \leq \frac{s^2}{c^2}$$

Diese Ungleichung wird benutzt, wenn nur μ und s gegeben sind. Sie gilt für alle Verteilungen. Bei einer angenommenen Abweichung von $2s$ um den Erwartungswert, ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von ca. 75%, bei $3s$ sind es ca. 89%.

7. Gesetz der großen Zahlen

Def.: Die Wahrscheinlichkeit, daß bei n unabhängigen Durchführungen eines Zufallsexperimentes die relative Häufigkeit eines Ereignisses A von der Wahrscheinlichkeit $P(A)$ um weniger als eine beliebig vorgegebene Zahl $c>0$ abweicht, strebt gegen 1, wenn die Anzahl der Wiederholungen gegen Unendlich strebt.

Gegeben ist X als $B_{n;p}$-verteilte Zufallsvariable (binomialverteilt), c als Toleranzband um die Wahrscheinlichkeit p und $\overline{X} = \frac{1}{n} \cdot X$, so gilt:

$$P\left(\left| \overline{X} - p \right| < c \right) \geq 1 - \frac{1}{4nc^2}$$