

Steckbriefaufgaben, Erklärung und Beispiel Glege 06/99

Aufstellen von Funktionen aus vorgegebenen Eigenschaften

Lösungsmethode:

Zur Übersicht schreibt man zunächst die Funktion und zwei Ableitung allgemein auf. Ist eine Funktion 3. Grades gesucht, lauten die Gleichungen:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

Die im Text angegebenen Infos müssen in mathematische Gleichungen übersetzt werden. Da in einem Satz mehrere Angaben verschachtelt vorkommen können, den Text dreimal zu lesen. Beim ersten Lesen achtet man nur auf Angaben über Punkte der Funktion. Diese werden in die Ausgangsfunktion eingesetzt. Beim zweiten Lesen schreibt man alles heraus, was mit Steigungen zu tun hat. Diese Infos werden in die 1. Ableitung eingesetzt. Beim dritten Lesen wird nach Wendepunkten gesucht. Diese sind Nullstellen der 2. Ableitung.

Textbeispiele zu Punkten:

...hat im Punkt (3/4)...	⇒	$f(3) = 4$
...geht durch den Ursprung...	⇒	$f(0) = 0$
...berührt / schneidet die x -Achse bei $x = 5$...	⇒	$f(5) = 0$
...schneidet die y -Achse bei $y = -3$...	⇒	$f(0) = -3$

Textbeispiele zu Steigungen:

...hat bei $x = 3$ die Steigung $m = -1$...	⇒	$f'(3) = -1$
...ist bei $x = 4$ parallel zur Geraden $y = 2x + 3$...	⇒	$f'(4) = 2$
...berührt die x -Achse bei $x = 5$...	⇒	$f'(5) = 0$

Textbeispiele zu Wendepunkten:

...hat bei $x = -3$ einen Wendepunkt...	⇒	$f''(-3) = 0$
...seine Wendetangente bei $x = 2$...	⇒	$f''(2) = 0$

Die so gefundenen Infos werden in die allgemeinen Funktionen eingesetzt. Es ergibt sich ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösung die Koeffizienten der gesuchten Funktion sind.

Beispiel:

Die Parabel einer Funktion 3. Grades geht durch den Ursprung. Ihre Wendetangente bei $x=2$ lautet $g(x) = -2x+8$.

Lösung:

a) Funktion, 1. und 2. Ableitung allgemein bilden:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

b) Infos über Punkte sammeln:

$$\text{Ursprung} \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0 \Rightarrow \quad 0 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = d$$

$$g(2) = -2 \cdot 2 + 8 = 4 \Rightarrow \quad f(2) = 4 \Rightarrow \quad 0 = 2^3 \cdot a + 2^2 \cdot b + 2 \cdot c + d$$

c) Infos über Steigungen:

$$m = -2 \text{ bei } x = 2 \quad \Rightarrow \quad f'(2) = -2 \Rightarrow \quad -2 = 3 \cdot 2^2 \cdot a + 2 \cdot 2 \cdot b + c$$

d) Infos über Wendpunkte:

$$\text{WP bei } x = 2 \quad \Rightarrow \quad f''(2) = 0 \Rightarrow \quad 0 = 6 \cdot 2 \cdot a + 2 \cdot b$$

e) Aufstellen des Gleichungssystems

$$\text{I)} \quad 4 = 8a + 4b + 2c$$

$$\text{II)} \quad -2 = 12a + 4b + c$$

$$\text{III)} \quad 0 = 12a + 2b$$

$$\text{I} - 2 \cdot \text{II} = \text{I)} \quad 8 = -16a - 4b$$

$$\text{III)} \quad 0 = 12a + 2b$$

$$\text{I} + 2 \cdot \text{III)} \quad 8 = 8a \quad \Leftrightarrow \quad a = 1$$

$$a \text{ in III)} \quad 0 = 12 + 2b \quad \Leftrightarrow \quad b = -6$$

$$a, b \text{ in I)} \quad 4 = 8 - 24 + 2c \quad \Leftrightarrow \quad c = 10$$

f) Ergebnis:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x$$