Nullstellen quadratischer Gleichungen

Glege 06/95

Eine quadratische Gleichung hat die Form $y = ax^2 + bx + c$. Alle Punkte der Parabel setzen sich aus einer x- und einer y-Koordinate zusammen. Nullstellen sind die Punkte, die auf der x-Achse liegen. Bei Punkten auf der x-Achse ist die y-Koordinate = 0. Deshalb muss zur Berechnung von Nullstellen die y-Koordinate = 0 gesetzt werden. Als Lösung bekommt man die x-Koordinaten heraus, an denen die Nullstellen liegen.
Es gibt drei Möglichkeiten:

1. zwei Lösungen: zwei Nullstellen, an denen die Parabel die x-Achse schneidet
2. eine Lösung: eine (doppelte) Nullstelle, an der die x-Achse von der Parabel berührt wird
3. keine Lösung: keine Nullstelle, die Parabel liegt vollständig oberhalb oder unterhalb der x-Achse

<u>Lösungswege:</u>

1. quadratische Ergänzung

Beispiel:

$y = 2x^2 – 12x – 32$	| $y = 0$ setzen
$0 = 2x^2 – 12x – 32$	| :2 um die Normalform zu erhalten
$0 = x^2 – 6x – 16$	| + quadratische Ergänzung die quadr. Ergänzung ist der Faktor vor dem "x", geteilt durch 2, dann quadriert: $6 : 2 = 3$ dann $3^2 = 9$
$9 = x^2 – 6x + 9 – 16$	| +16
$25 = x^2 – 6x + 9$	| rechte Seite als Binom schreiben; in die Klammer kommt die Hälfte des Faktors vor dem "x" und dessen Vorzeichen: $–6 : 2 = -3$
$25 = (x – 3)^2$	| $\sqrt{\ }$
$5 = \|x – 3\|$	| Betrag heißt: $(x – 3)$ kann positiv oder negativ sein

$5 = x – 3$ | +3 oder $–5 = x – 3$ | +3

$8 = x_1$ $\qquad$ $–2 = x_2$

2. pq-Formel

für die Gleichung $0 = x^2 + px + q$

sind die Lösungen: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Beispiel: $0 = x^2 - 6x - 16$ | p = -6 und q = -16

$$x_{1,2} = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - (-16)}$$

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9+16}$$

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{25}$$

$$x_{1,2} = 3 \pm 5$$

Lösungen: $x_1 = –2$; $x_2 = 8$

Sonderfälle:

1. Funktionen der Form $0 = ax^2 + c$

Beisp.:	$0 = 2x^2 - 18$	$\mid +18$ um nach $2x^2$ aufzulösen
	$18 = 2x^2$	$\mid :2$ um nach x^2 aufzulösen
	$9 = x^2$	$\mid \sqrt{}$
	$3 = \lvert x \rvert$	$\mid$ x kann positiv oder negativ sein
	$x_1 = 3$ oder $x_2 = -3$	

2. Funktionen der Form $0 = ax^2 + bx$

Beisp.:	$0 = 4x^2 - 8x$	$\mid$ x ausklammern
	$0 = x\,(4x - 8)$	$\mid$ die Gleichung stimmt, wenn x oder die Klammer = 0 ist
	$x_1 = 0$ oder $0 = 4x - 8$	$\mid +8$
	$8 = 4x$	$\mid :4$
	$x_2 = 2$	

3. Funktionen in Linearfaktoren zerlegt

Beisp.:	$0 = (x + 3) \cdot (x - 2)$	$\mid$ Die Lösungen sind die x-Werte, mit denen die Klammern = 0 werden.
	$x_1 = -3$ und $x_2 = 2$	

Keine oder eine Nullstelle

1. keine Nullstelle

Beisp.: $0 = x^2 - 4x + 5$ | Lösung mit der pq-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 5}$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 5}$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-1}$$ | negative Zahl unter der Wurzel!

keine Lösung

2. eine Nullstelle (doppelte Nullstelle)

Beisp.: $0 = x^2 - 4x + 4$ | Lösung mit der pq-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 4}$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 4}$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{0}$$ | $\sqrt{0} = 0$

$x_1 = 2$ und $x_2 = 2$