Lösung der Abitur-Übung 3:

Aufgabe 3.1.a)

Funktion allgemein:	$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$		
Ableitungen allgemein:	$f'(x)=3ax^2+2bx+c$		
	$f''(x)=6ax+2b$		
Ursprung (0/0)	$f(0)=0$	$0=d$	
Berührungspunkt im WP (2/4)	$f(2)=4$	$4=8a+4b+2c+d$	weil: $g(2)=4$
Steigung im WP ist m=-2	$f'(2)=-2$	$-2=12a+4b+c$	weil: $g'(2)=-2$
Wendepunkt bei x=2	$f''(2)=0$	$0=12a+2b$	notwendige Bedingung

Gleichungssystem:

I)	$4=8a+4b+2c$	
II)	$-2=12a+4b+c$	
III)	$0=12a+2b$	
I)	$4=8a+4b+2c$	
I-2·II=II)	$8=-16a-4b$	
III)	$0=12a+2b$	
I)	$4=8a+4b+2c$	
II)	$8=-16a-4b$	
II+2·III=III)	$8=8a$	$a=1$
a in II)	$8=-16-4b$	$b=-6$
a,b in I)	$4=8-24+2c$	$c=10$

Lösung: $f(x)=x^3-6x^2+10x$

Aufgabe 3.1.b)

1.) Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}$

2.) Schnittpunkt mit der $f(x)$-Achse, Bedingung: $x=0$

$f(0)=0^3-6\cdot 0^2+10\cdot 0=0$

SP_y (0/0)

3.) Nullstellen, Bedingung: $f(x)=0$

$$0=x^3-6x^2+10x$$
$$=x\cdot\left(x^2-6x+10\right)$$
$$x_1=0 \quad\vee\quad x^2-6x+10=0$$
$$x_{2,3}=3\pm\sqrt{3^2-10} \quad \text{|hat keine Lösung}$$

N_1 (0/0)

4.) Symmetrie

a) Prüfung auf Achsensymmetrie; Bedingung: $f(x)=f(-x)$

$$x^3-6x^2+10x=(-x)^3-6\cdot(-x)^2+10\cdot(-x)$$
$$=-x^3-6x^2-10x \quad \text{| falsche Aussage, dh. keine Achsensymmetrie}$$

b) Prüfung auf Punktsymmetrie; Bedingung: $f(x)=-f(-x)$

$$x^3-6x^2+10x=-\left((-x)^3-6\cdot(-x)^2+10\cdot(-x)\right)$$
$$=-\left(-x^3-6x^2-10x\right)$$
$$=x^3+6x^2+10x \quad \text{| falsche Aussage, dh. keine Punktsymmetrie}$$

5.) Extremwerte (Maximum, Minimum)

a) notwendige Bedingung: $f'(x)=0$

$$f'(x)=3x^2-12x+10$$

$$0=3x^2-12x+10 \quad |:3$$

$$0=x^2-4x+\frac{10}{3}$$

$$x_{1,2}=2\pm\sqrt{2^2-\frac{10}{3}}$$

$$x_{1,2}=2\pm\sqrt{\frac{12}{3}-\frac{10}{3}}$$

$$x_1=2+\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad x_2=2-\sqrt{\frac{2}{3}}$$

b) hinreichende Bedingung: $f''(x_{1,2})\neq 0$

$$f''(x)=6x-12$$

$$f''\left(2+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=6\cdot\left(2+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)-12$$

$$=12+6\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}-12>0 \quad \text{dh. Minimum für } x_1=2+\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$f''\left(2-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=6\cdot\left(2-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)-12$$

$$=12-6\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}-12<0 \quad \text{dh. Maximum für } x_2=2-\sqrt{\frac{2}{3}}$$

c) y-Koordinaten:

$$f\left(2+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\left(2+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3-6\cdot\left(2+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2+10\cdot\left(2+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$=2^3+3\cdot 2^2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}+3\cdot 2\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3-6\cdot\left(4+4\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}\right)+10\cdot\left(2+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$=8+12\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}+4+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}-24-24\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}-4+20+10\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$=8+4-24-4+20+\left(12+\frac{2}{3}-24+10\right)\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$=4-\frac{4}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 4-1{,}09=2{,}91 \qquad \text{Minimum}\left(2{,}82/2{,}91\right)$$

$$f\left(2-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\left(2-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3-6\cdot\left(2-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2+10\cdot\left(2-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$=2^3-3\cdot 2^2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}+3\cdot 2\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3-6\cdot\left(4-4\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}\right)+10\cdot\left(2-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$=8-12\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}+4-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}-24+24\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}-4+20-10\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$=8+4-24-4+20+\left(-12-\frac{2}{3}+24-10\right)\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$=4+\frac{4}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 4+1{,}09=5{,}09 \qquad \text{Maximum }(1{,}18/5{,}09)$$

4.) Wendepunkt

a) notwendige Bedingung: $f''(x)=0$

$f''(x)=6x-12$

$0=6x-12$

$x=2$

b) hinreichende Bedingung: $f'''(2)\neq 0$

$f'''(x)=6$

$f'''(2)=6>0$

Wendepunkt bei $x = 2$ mit einer rechts-links Krümmung

c) y-Koordinate:

$f(2)=2^3-6\cdot 2^2+10\cdot 2=4$ Wendepunkt $(2/4)$

5.) Randverhalten

a) Verhalten des Graphen für $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left[x^3\left(\frac{x^3}{x^3}-\frac{6x^2}{x^3}+\frac{10x}{x^3}\right)\right] \qquad \text{höchste Potenz wurde ausgeklammert}$$

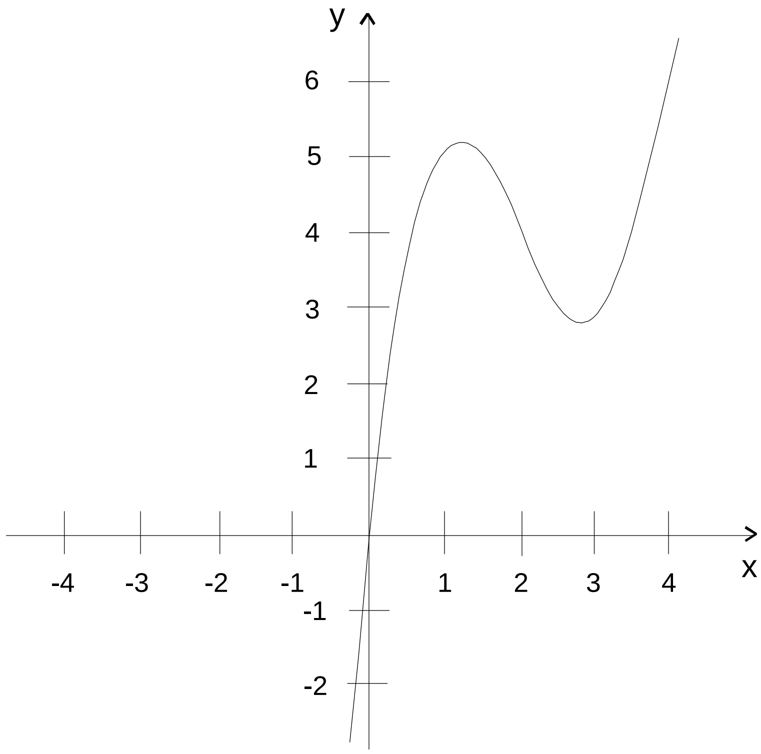
$$=\lim_{x\to\infty}\left[x^3\left(1-\frac{6}{x}+\frac{10}{x^2}\right)\right]=\infty\cdot(1-0+0)=\infty$$

b) Verhalten des Graphen für $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x^3\left(\frac{x^3}{x^3}-\frac{6x^2}{x^3}+\frac{10x}{x^3}\right)\right] \qquad \text{höchste Potenz wurde ausgeklammert}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[x^3\left(1-\frac{6}{x}+\frac{10}{x^2}\right)\right]=-\infty\cdot(1-0+0)=-\infty$$

6.) Skizze:



Aufgabe 3.1.c)

Die Grenzen sind die Schnittpunkte der Funktionen. Schnittpunktberechnung durch Gleichsetzen der Funktionen:

$$x^3 - 6x^2 + 10x = -6x^2 + 19x \quad | +6x^2 - 19x$$

$$x^3 - 9x = 0 \quad | = \text{Differenzfunktion zum Integrieren}$$

$$x \cdot \left(x^2 - 3^2\right) = 0$$

$$x \cdot (x+3) \cdot (x-3) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -3 \quad x_3 = 3$$

$$A_1 = \left| \int_{-3}^{0} \left(x^3 - 9x\right) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{9}{2} x^2 \right]_{-3}^{0} \right| = \left| 0 - \left(\frac{81}{4} - \frac{72}{2} \right) \right| = \left| -\left(\frac{81}{4} - \frac{144}{4} \right) \right| = \left| \frac{63}{4} \right| = 15{,}75 FE$$

Die Differenzfunktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung, da sie nur ungerade Exponenten hat. Die Beträge der Flächen von –3 bis 0 und von 0 bis 3 sind daher gleich. Es gilt:

$$A_{ges} = 2 \cdot A_1 = 2 \cdot 141{,}75 FE = 283{,}5 FE$$

Aufgabe 3.1.d)

a) Geradengleichung bestimmen durch Einsetzen der Extremwerte:

$$I)\qquad 4+\frac{4}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}=\left(2-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cdot m+b$$

$$II)\qquad 4-\frac{4}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}=\left(2+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cdot m+b$$

$$I-II)\qquad \frac{8}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}=-2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot m \qquad \Big|:\left(-2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$-\frac{4}{3}=m \qquad |\text{ in I) einsetzen}$$

$$4+\frac{4}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}=\left(2-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)+b$$

$$4+\frac{4}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{8}{3}-\frac{4}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}=b$$

$$\frac{20}{3}=b$$

Geradengleichung: $h(x)=-\frac{4}{3}x+\left(\frac{20}{3}+\frac{8}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

Schnittpunkt mit der $f(x)$-Achse; Bedingung: $y = f(0)$

$$h(0)=\frac{20}{3}+\frac{8}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Schnittpunkt mit der x-Achse; Bedingung: $f(x) = 0$

$$0=-\frac{4}{3}x+\left(\frac{20}{3}+\frac{8}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \qquad \Big|+\frac{4}{3}x$$

$$\frac{4}{3}x=\frac{20}{3}+\frac{8}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad \Big|\cdot\frac{3}{4}$$

$$x=5+2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Berechnung der Dreieckfläche: $A=\frac{1}{2}\cdot g\cdot h$

$$A=\frac{1}{2}\cdot\left(5+2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cdot\left(\frac{20}{3}+\frac{8}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$=\left(\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cdot\left(\frac{20}{3}+\frac{8}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$=\frac{50}{3}+\frac{20}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{20}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{16}{9}$$

$$=\frac{166}{3}+\frac{40}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 55{,}3+10{,}9=66{,}2FE$$

Aufgabe 3.1.e)

1.) Zielfunktion aufstellen:

HB: $d=\sqrt{x^2+y^2}$;Satz des Pythagoras

NB: $y=4-x^2$;NB in HB einsetzen

Fkt: $f(x)=\sqrt{x^2+(4-x^2)^2}$;den Extremwert bestimmen

$$f(x)=\sqrt{x^2+16-8x^2+x^4}=\left(x^4-7x^2+16\right)^{\frac{1}{2}}$$

2.) 1. Ableitung bilden (Kettenregel) und den Extremwert berechnen:

$$f'(x)=\left(4x^3-14x\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(x^4-7x^2+16\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{4x^3-14x}{2\cdot\sqrt{x^4-7x^2+16}}$$

a) notwendige Bedingung: $f'(x)=0$

$$0=\frac{4x^3-14x}{2\cdot\sqrt{x^4-7x^2+16}} \qquad |\cdot \text{Nenner}$$

$$0=4x^3-14x=x\cdot\left(4x^2-14\right)$$

$$x_1=0 \quad \vee \quad 0=4x^2-14$$

$$x^2=\frac{7}{2}$$

$$x_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{7}{2}}$$

b) weitere Untersuchung nach Vorzeichenwechselkriterium:

An den Stellen x_1, x_2 und x_3 kann die Steigung wechseln. x_1, x_2 und x_3 bilden Intervallgrenzen. Wir untersuchen die Steigungen innerhalb der vier Intervalle z.B. bei x_{I} = -2; x_{II} = -1; x_{III} = 1 und x_{IV} = 2

$$f'(-2)=\frac{4(-2)^3-14\cdot(-2)}{2\cdot\sqrt{(-2)^4-7\cdot(-2)^2+16}}=\frac{-32+28}{2\cdot\sqrt{16-28+16}}=-1 \quad \text{dh. negative Steigung}$$

$$f'(-1)=\frac{4\cdot(-1)^3-14\cdot(-1)}{2\cdot\sqrt{(-1)^4-7\cdot(-1)^2+16}}=\frac{-4+14}{2\cdot\sqrt{4-7+16}}=\frac{10}{2\cdot\sqrt{13}}>0 \quad \text{dh. positiveSteigung}$$

$$f'(1)=\frac{4\cdot1^3-14\cdot1}{2\cdot\sqrt{1^4-7\cdot1^2+16}}=\frac{4-14}{2\cdot\sqrt{1-7+16}}=-\frac{10}{2\cdot\sqrt{10}}<0 \quad \text{dh. negative Steigung}$$

$$f'(2)=\frac{4\cdot2^3-14\cdot2}{2\cdot\sqrt{2^4-7\cdot2^2+16}}=\frac{32-28}{2\cdot\sqrt{16-28+16}}=1 \quad \text{dh. postiveSteigung}$$

dh. Maximum für $x_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{7}{2}}$ (aus Symmetriegründen der Parabel)

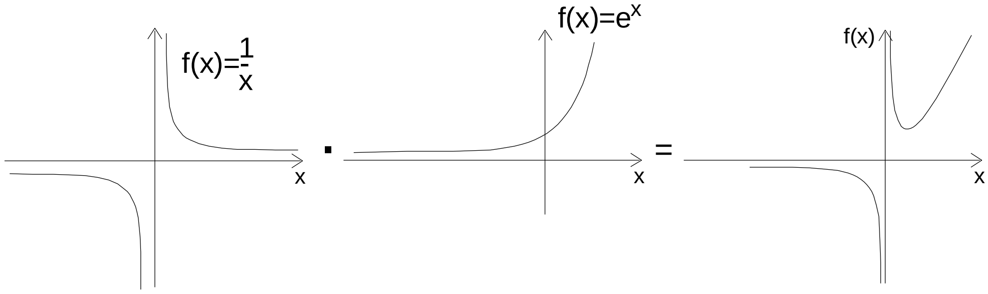
c) Berechnung der kürzesten Strecke mit x_2:

$$f(x_2)=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^4-7\cdot\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2+16}=\sqrt{\frac{49}{4}-7\cdot\frac{7}{2}+16}=\sqrt{\frac{15}{4}}$$

Ergebnis: Das maximale Rechteck entsteht für $x=\frac{5}{6}$.

Aufgabe 3.2.a)

Vorüberlegung: Graphische Multiplikation der Kurven der Hyperbelfunktion und der *e*-Funktion



Der Einfluß der Exponentialfunktion ist an den Definitionsrändern größer als der einer Potenzfunktion. Deshalb läuft der Graph gegen Unendlich, wenn *x* gegen plus Unendlich läuft. Im Bereich x=0 ist der Wert der Exponentialfunktion gleich 1, sodaß die Hyperbelfunktion hier den größeren Einfluß hat.

1) Definitionsbereich: ID = IR

2) Nullstelle:

$$0=\frac{1}{x}\cdot e^x$$

$0=\frac{1}{x} \quad\vee\quad 0=e^x$ die Exponentialfunktion hat keine Nullstellen

$L=\{\}\qquad L=\{\}$

3) Extremwerte (Maximum, Minimum)

a) notwendige Bedingung: $f'(x)=0$

$$f'(x)=-x^{-2}\cdot e^x+x^{-1}\cdot e^x=e^x\cdot\left(\frac{1}{-x^2}+\frac{1}{x}\right)=e^x\cdot\left(\frac{1}{-x^2}+\frac{-x}{-x^2}\right)=e^x\cdot\left(\frac{x-1}{x^2}\right)$$

$0=e^x \quad\vee\quad 0=\frac{x-1}{x^2}$

$L=\{\}\qquad x_1=1$

b) hinreichende Bedingung: $f''(x_1)\neq 0$

$$f''(x)=2x^{-3}\cdot e^x+(-x)^{-2}\cdot e^x+(-x)^{-2}\cdot e^x+x^{-1}\cdot e^x=e^x\left(\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)$$

$$=e^x\cdot\left(\frac{2}{x^3}-\frac{x}{x^3}-\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x}\right)=e^x\cdot\left(\frac{2}{x^3}-\frac{2x}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}\right)=e^x\cdot\left(\frac{x^2-2x+2}{x^3}\right)$$

$f''(1)=e^1\cdot(2-2+1)=e>0$ dh. Minimum für $x=1$

c) y-Koordinaten:

$$f(1) = \frac{1}{1} \cdot e^1 = e$$

$\text{Minimum}\,(1/e)$

4.) Wendepunkte

a) notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$0 = e^x \cdot \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x^3} \right)$$

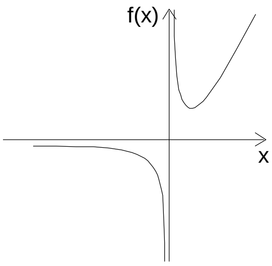
$$0 = e^x \quad \vee \quad 0 = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3} \quad | \cdot x^3$$

$$L = \{\} \qquad x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 2}$$

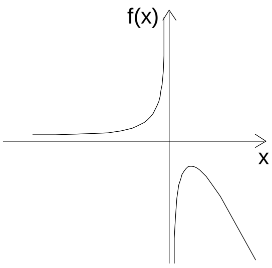
$$L = \{\}$$

5) linker Rand: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ rechter Rand: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

6) Skizze:

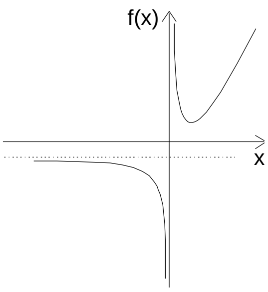


Aufgabe 3.2.b)



Spiegelung an der x-Achse:

Aufgabe 3.2.c)



Verschiebung um eine Einheit nach unten:

Aufgabe 3.2.d)

$$A = \left| \lim_{a \to \infty} \left(\int_1^a \frac{1}{x} dx \right) \right| = \left| \lim_{a \to \infty} \left([\ln(x)]_1^a \right) \right| = \left| \lim_{a \to \infty} (\ln(a) - \ln(1)) \right| = |\infty - 0| = \infty$$

Aufgabe 3.3.a)

1.) Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$

2.) Nullstellen; Bed.: $f(x) = 0$

$$0 = \frac{x+2}{x^2-4} \qquad | \cdot (x^2-4)$$

$$0 = x+2$$

$$x = -2$$

Keine Lösung, da $x=-2$ nicht Element des Definitionsbereiches ist.

3.) Verhalten an den Unstetigkeitsstellen

a) linksseitig für $x=-2$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{(-2-h)+2}{(-2-h)^2-4}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{-h}{4h+h^2}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{-1}{4+h}\right) = -\frac{1}{4}$$

b) rechtsseitig für $x=-2$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{(-2+h)+2}{(-2+h)^2-4}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{h}{-4h+h^2}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{-4+h}\right) = -\frac{1}{4}$$

Bei $x=-2$ liegt eine Lücke vor.

c) linksseitig für $x=2$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{(2-h)+2}{(2-h)^2-4}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{4-h}{-4h+h^2}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{4}{-4h+h^2}\right) + \lim_{h\to 0}\left(\frac{-h}{-4h+h^2}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{4}{-4h+h^2}\right) + \lim_{h\to 0}\left(\frac{-1}{-4+h}\right) = -\infty + \frac{1}{4} = -\infty$$

Im Intervall [0;1] sind die Werte für h größer als für h^2, deshalb ist das Vorzeichen von h ausschlaggebend für den Grenzwert.

d) rechtsseitig für $x=2$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{(2+h)+2}{(2+h)^2-4}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{4+h}{4h+h^2}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{4}{4h+h^2}\right) + \lim_{h\to 0}\left(\frac{h}{4h+h^2}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{4}{4h+h^2}\right) + \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{4+h}\right) = \infty + \frac{1}{4} = \infty$$

Bei $x=2$ liegt eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel vor.

4.) Extremwerte:

a) notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

Quotientenregel: $\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2-4)-(x+2)\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2-4-2x^2-4x}{(x^2-4)^2} = \frac{-x^2-4x-4}{(x^2-4)^2}$$

$$0 = \frac{-x^2 - 4x - 4}{(x^2-4)^2} \quad | \cdot \text{Nenner}$$

$$0 = -x^2 - 4x - 4 \quad | \cdot (-1)$$

$$0 = x^2 + 4x + 4 \quad | \; pq-\text{Formel} \; - \; \text{(oder erkennen, daß es das Binom } (x+2)^2 \text{ ist)}$$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-4}$$

$$x_{1,2} = -2$$

Keine Lösung, da $x=-2$ kein Element des Definitionsbereiches ist.

5) Wendepunkte

a) notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$f''(x) = \frac{(-2x-4)\cdot(x^2-4)^2 - (-x^2-4x-4)\cdot 2x\cdot 2\cdot(x^2-4)}{(x^2-4)^4} \qquad | \; (x^2-4) \text{kürzen}$$

$$= \frac{(-2x-4)\cdot(x^2-4) - (-x^2-4x-4)\cdot 4x}{(x^2-4)^3}$$

$$= \frac{-2x^3 + 8x - 4x^2 + 16 - (-4x^3 - 16x^2 - 16x)}{(x^2-4)^3}$$

$$= \frac{2x^3 + 12x^2 + 24x + 16}{(x^2-4)^3}$$

$$0 = \frac{2x^3 + 12x^2 + 24x + 16}{(x^2-4)^3} \quad | \cdot \text{Nenner}$$

$$0 = 2x^3 + 12x^2 + 24x + 16 \quad |: 2$$

$$0 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

Erstes Ergebnis raten: möglich sind ganze Teiler der Konstanten 8. Da in dem Term nur Pluszeichen stehen, werden nur negative Teiler probiert:

$$x = -1 \qquad (-1)^3 + 6\cdot(-1)^2 + 12\cdot(-1) + 8 = -1 + 6 - 12 + 8 = 1 \neq 0$$

$$x = -2 \qquad (-2)^3 + 6\cdot(-2)^2 + 12\cdot(-2) + 8 = -8 + 24 - 24 + 8 = 0$$

dh. ein Linearfaktor ist $(x+2)$, durch den der Term dividiert wird:

$$\begin{array}{l}
(x^3 + 6x^2 + 12x + 8) : (x+2) = x^2 + 4x + 4 \\
-\underline{(x^3 + 2x^2)} \\
\quad 4x^2 \\
\quad -\underline{(4x^2 + 8x)} \\
\qquad 4x \\
\qquad -\underline{(4x + 8)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

Das Ergebnis ist das erste Binom $(x+2)^2$; dh. die zweite und dritte Lösung ist ebenfalls $x=-2$
Die Funktion hat keine Wendepunkte, da $x=-2$ kein Element des Definitionsbereiches ist.

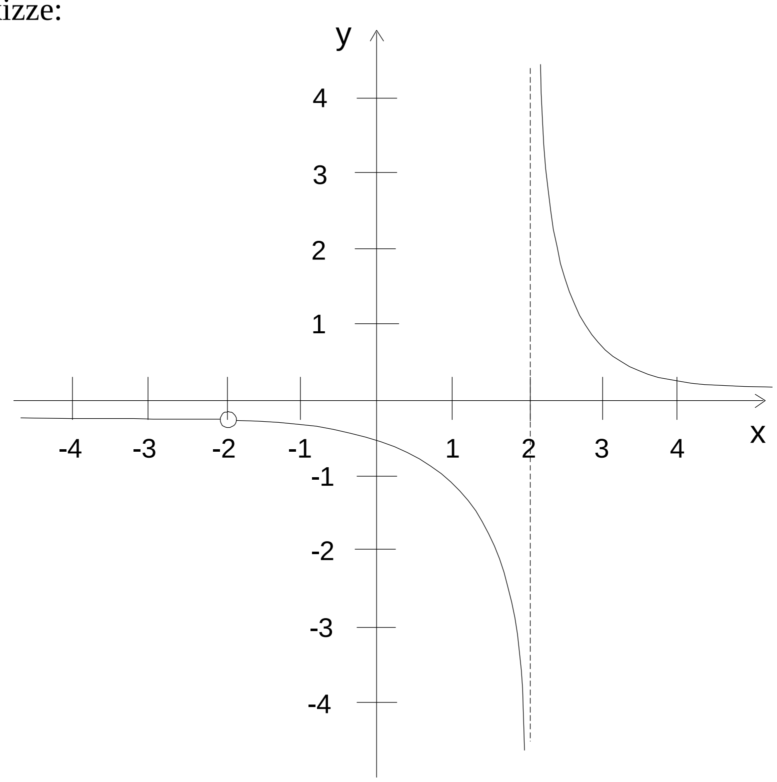
6.) Randverhalten:

Zähler und Nenner durch die höchste <u>Nenner</u>potenz teilen.

a) linker Rand: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+2}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\frac{x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}\right)=\dfrac{0+0}{1-0}=0$

b) rechter Rand: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\frac{x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}\right)=\dfrac{0+0}{1-0}=0$

7.) Skizze:



Aufgabe 3.4.a)

Prüfung auf lineare Abhängigkeit mit $\vec{a}=k\cdot\vec{b}$

I) $1=t\cdot k$

II) $2=4\cdot k \quad\Leftrightarrow\quad k=\dfrac{1}{2}$

III) $t^2=8\cdot k$

nur für $k=\dfrac{1}{2}$ kann es lineare Abhängigkeit geben; wir suchen nun nach passenden t

I) $1=\dfrac{1}{2}\cdot t \quad\Leftrightarrow\quad t=2$

III) $t^2=8\cdot\dfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad t=\pm 2$

Lösung: für $t=2$ sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig

Aufgabe 3.4.b)

$$\vec{c} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.4.c)

Ebene: E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

Bildung des Normalenvektors mit Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} \text{I)} & 1x + 4y + 8z = 0 \\ \text{II)} & 3x + 4y - 4z = 0 \quad | \text{ wähle } z = 1 \\ \hline \text{I)} & x + 4y = -8 \\ \text{II)} & 3x + 4y = 4 \\ \hline \text{I - II)} & -2x = -12 \quad |:(-2) \\ & x = 6 \\ x \text{ in I)} & 6 + 4y = -8 \quad | -6 \\ & 4y = -14 \quad |: 4 \\ & y = -\frac{7}{2} \end{array}$$

um ganzzahlige Koordinaten zu bekommen, wird der Normalenvektor mit 2 multipliziert:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Multiplikation der Ebenengleichung in Parameterform mit dem Normalenvektor:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{die Multiplikation mit den Richtungsvektoren ergibt Null}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \text{Normalenform der Ebene}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} - 0 = 0$$

$12x - 7y + 2z = 0$ Koordinatenform der Ebene

Aufgabe 3.4.d)

Gerade: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1-3 \\ 2-4 \\ 9-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3.4.e)

Untersuchung des Richtungsvektors der Geraden auf Orthogonalität zum Normalenvektor der Ebene durch Skalarmultiplikation:

$\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = -24 + 14 + 2 = -8 \neq 0$ dh. nicht othogonal

Also muß es einen Durchdringungspunkt der Geraden mit der Ebene geben. Die Gerade und die Ebene gleichsetzen und s berechnen und in die Geradengleichung einsetzen:

$$\begin{array}{rlcl}
\text{I)} & 1 - 2s = 1 + u + 3v & \Leftrightarrow & -2s - u - 3v = 0 \\
\text{II)} & 2 - 2s = 2 + 4u + 4v & \Leftrightarrow & -2s - 4u - 4v = 0 \\
\text{III)} & 9 + s = 1 + 8u - 4v & \Leftrightarrow & s - 8u + 4v = -8 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
 & -2s - u - 3v = 0 \\
4 \cdot \text{I} - 3 \cdot \text{II} = \text{II)} & -2s - 16u = 0 \\
\text{II} + \text{III} = \text{III)} & -s - 12u = -8 \\
\hline
 & -2s - u - 3v = 0 \\
 & -2s - 16u = 0 \\
3 \cdot \text{II} + 4 \cdot \text{III} = \text{III)} & -2s = -32 \quad \Leftrightarrow \quad s = 16
\end{array}$$

s in die Geradengleichung eingesetzt ergibt den Durchdringungspunkt:

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + 16 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31 \\ -30 \\ 25 \end{pmatrix}$ $D(-31/-30/25)$

Aufgabe 3.4.f)

Verschiebungsvektor ist der Ortsvektor von P; Richtungsvektor ist derselbe, wie der der Geraden g:

$$g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.4.g)

Normierung des Normalenvektors der Ebene:

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{12^2 + (-7)^2 + 2^2}} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{197}} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Abstand berechnen:

$$|0E| = \vec{n}_0 \cdot \vec{p} = \frac{1}{\sqrt{197}} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{12 - 14 + 2}{\sqrt{197}} = 0$$

Der Abstand ist Null, dh. der Ursprung liegt in der Ebene.

Aufgabe 3.5.a)

Wir tragen die verschiedenen Möglichkeiten je in einer Tabelle ein und berechnen zu jeder Möglichkeit den Erwartungswert der verkaufte Zeitungen und den durchschnittlichen Gewinn. Der Gewinn setzt sich aus Einkaufspreis (0,70 DM), Verkaufspreis (1,00) und verminderter Verkauspreis (0,50 DM) zusammen:

1. Möglichkeit: Einkauf von 100 Zeitungen

Anzahl n	Wahrscheinlichkeit $P(X=n)$	$E(X) = n \cdot P(X=n)$
100	0,05	5
80	0,4	32
60	0,35	21
40	0,2	8

Summe: 66

Gewinn = -100 · 0,70 DM + 66 · 1,00 DM + 34 · 0,50 DM = 13,00 DM

2. Möglichkeit: Einkauf von 80 Zeitungen

Anzahl n	Wahrscheinlichkeit $P(X=n)$	$E(X) = n \cdot P(X=n)$
80	0,05 + 0,4 = 0,45	36
60	0,35	21
40	0,2	8

Summe: 65

Gewinn = -80 · 0,70 DM + 65 · 1,00 DM + 35 · 0,50 DM = 26,50 DM

3. Möglichkeit: Einkauf von 60 Zeitungen

Anzahl n	Wahrscheinlichkeit $P(X=n)$	$E(X) = n \cdot P(X=n)$
60	0,45 + 0,35 = 0,8	48
40	0,2	8

Summe: 56

Gewinn = -60 · 0,70 DM + 56 · 1,00 DM + 44 · 0,50 DM = 36,00 DM

4. Möglichkeit: Einkauf von 40 Zeitungen

Anzahl n	Wahrscheinlichkeit $P(X=n)$	$E(X) = n \cdot P(X=n)$
40	0,8 + 0,2 = 1	40

Summe: 40

Gewinn = -40 · 0,70 DM + 40 · 1,00 DM + 0 · 0,50 DM = 12,00 DM

Ergebnis: Beim Einkauf von 60 Zeitungen wird der größte Gewinn erzielt.