

Lösung der Abitur-Übung 2:

Aufgabe 2.1.a)

Funktion allgemein:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Ableitungen allgemein:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

SP mit Geraden bei $(-1/0)$

$$f(-1) = 0 \quad 0 = -a + b - c + d$$

weil: $g(-1) = 0$

Berührungspunkt im WP $(1/2)$

$$f(1) = 2 \quad 2 = a + b + c + d$$

weil: $t(1) = 2$

Steigung im WP ist $m = -3$

$$f'(1) = -3 \quad -3 = 3a + 2b + c$$

weil: $t'(1) = -3$

Wendepunkt bei $x = 1$

$$f''(1) = 0 \quad 0 = 6a + 2b$$

notwendige Bedingung

Gleichungssystem:

$$\text{I) } 0 = -a + b - c + d$$

$$\text{II) } 2 = a + b + c + d$$

$$\text{III) } -3 = 3a + 2b + c$$

$$\text{IV) } 0 = 6a + 2b$$

$$\text{I) } 0 = -a + b - c + d$$

$$\text{I-II=II) } -2 = -2a - 2c$$

$$\text{III) } -3 = 3a + 2b + c$$

$$\text{IV) } 0 = 6a + 2b$$

$$\text{I) } 0 = -a + b - c + d$$

$$\text{II) } -2 = -2a - 2c$$

$$\text{II} + 2 \cdot \text{III} = \text{III) } -8 = 4a + 4b$$

$$\text{IV) } 0 = 6a + 2b$$

$$\text{I) } 0 = -a + b - c + d$$

$$\text{II) } -2 = -2a - 2c$$

$$\text{III) } -8 = -8a - 4b$$

$$\text{III} - 2 \cdot \text{IV} = \text{IV) } -8 = -8a$$

$$\underline{\underline{a = 1}}$$

$$a \text{ in IV) } 0 = 6 + 2b$$

$$\underline{\underline{b = -3}}$$

$$a \text{ in II) } -2 = -2 - 2c$$

$$\underline{\underline{c = 0}}$$

$$a, b, c \text{ in I) } 0 = -1 - 3 + d$$

$$\underline{\underline{d = 4}}$$

$$\text{Lösung: } f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

Aufgabe 2.1.b)

1.) Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

2.) Nullstellen, Bedingung: $f(x) = 0$

erste Nullstelle raten; möglich sind ± 1 ; ± 2 oder ± 4 (ganze Teiler der Konstanten $d = 4$)

Probe für $x = 1$: $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 = 2 \neq 0$ d.h. keine Nullstelle für $x = 1$

Probe für $x = -1$: $f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 4 = -1 - 3 + 4 = 0$ Nullstelle für $x = -1$

Polynomdivision durch den Linearfaktor $(x + 1)$

$$(x^3 - 3x^2 + 0x + 4) : (x + 1) = x^2 - 4x + 4$$

$$\begin{array}{r} -(x^3 + x^2) \\ \hline \end{array}$$

$$-4x^2$$

$$\begin{array}{r} -(-4x^2 - 4x) \\ \hline \end{array}$$

$$4x$$

$$\begin{array}{r} -(4x + 4) \\ \hline \end{array}$$

$$0$$

zweite und dritte Nullstelle über die pq-Formel für: $x^2 - 4x + 4 = 0$

$$x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{0}$$

$$x_{2,3} = 2$$

$$N_1 (-1/0)$$

$$N_{2,3} (2/0)$$

3.) Extremwerte (Maximum, Minimum)

a) notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$0 = 3x^2 - 6x \quad |:3$$

$$0 = x^2 - 2x = x(x-2)$$

$$x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = 2$$

b) hinreichende Bedingung: $f''(x_{1,2}) \neq 0$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f''(0) = 6 \cdot 0 - 6 = -6 < 0$$

Maximum bei $x = 0$

$$f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6 > 0$$

Minimum bei $x = 2$

c) y-Koordinaten:

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 4 = 4$$

Maximum (0/4)

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 = 0$$

Minimum (2/0)

4.) Wendepunkt

a) notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$0 = 6x - 6 \quad |+6 \quad |:6$$

$$x_1 = 1$$

b) hinreichende Bedingung: $f'''(1) \neq 0$

$$f'''(x) = 6$$

$$f'''(1) = 6 > 0$$

Wendepunkt bei $x = 1$ mit einer rechts-links Krümmung

c) y-Koordinate:

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 = 2$$

Wendepunkt (1/2)

5.) Randverhalten

a) Verhalten des Graphen für $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x^3 \left(\frac{x^3}{x^3} - \frac{3x^2}{x^3} + \frac{4}{x^3} \right) \right]$$

höchste Potenz wurde ausgeklammert

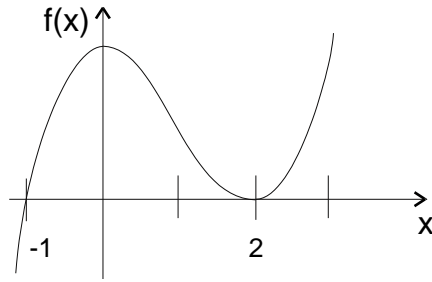
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3} \right) \right] = \infty \cdot (1 - 0 + 0) = \infty$$

b) Verhalten des Graphen für $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^3 \left(\frac{x^3}{x^3} - \frac{3x^2}{x^3} + \frac{4}{x^3} \right) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3} \right) \right] = -\infty \cdot (1 - 0 + 0) = -\infty$$

6.) Skizze:



Aufgabe 2.1.c)

Die Grenzen sind die Nullstellen der Funktion.

$$\begin{aligned}
 A &= \left| \int_{-1}^2 (x^3 - 3x^2 + 4) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{4} x^4 - x^3 + 4x \right]_{-1}^2 \right| \\
 &= \left| \left[\frac{1}{4} 2^4 - 2^3 + 4 \cdot 2 \right] - \left[\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 - (-1)^3 + 4 \cdot (-1) \right] \right| = \left| 4 - \left(-\frac{11}{4} \right) \right| = \left| \frac{16}{4} + \frac{11}{4} \right| = \frac{27}{4} = 6\frac{3}{4} FE
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.1.d)

a) x-Koordinaten der Schnittpunkte durch Gleichsetzen berechnen:

$$x^3 - 3x^2 + 4 = x + 1 \quad | -x - 1$$

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$$

erste Nullstelle raten; möglich sind ± 1 oder ± 3 (ganze Teiler der Konstanten $d=3$)

Probe für $x=1$: $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 1 + 3 = 0$ d.h. Nullstelle für $x=1$

Polynomdivision durch den Linearfaktor $(x-1)$

$$(x^3 - 3x^2 - x + 3) : (x-1) = x^2 - 2x - 3$$

$$\begin{array}{r} -(x^3 - x^2) \\ \hline \end{array}$$

$$-2x^2$$

$$\begin{array}{r} -(-2x^2 + 2x) \\ \hline \end{array}$$

$$-3x$$

$$\begin{array}{r} -(-3x + 3) \\ \hline \end{array}$$

$$0$$

zweite und dritte Nullstelle über die pq-Formel für: $x^2 - 2x - 3 = 0$

$$x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1+3}$$

$$x_{2,3} = 1 \pm 2$$

$N_1 (1/0)$

$N_2 (-1/0)$

$N_3 (3/0)$

b) Flächen berechnen:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \left| \int_{-1}^1 (x^3 - 3x^2 - x + 3) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{4} x^4 - x^3 - \frac{1}{2} x^2 + 3x \right]_{-1}^1 \right| \\
 &= \left| \left[\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3 \right] - \left[\frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} - 3 \right] \right| = \left| \left[\frac{1}{4} - \frac{4}{4} - \frac{2}{4} + \frac{12}{4} \right] - \left[\frac{1}{4} + \frac{4}{4} - \frac{2}{4} - \frac{12}{4} \right] \right| \\
 &= \left| \frac{7}{4} + \frac{9}{4} \right| = \frac{16}{4} = 4FE
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \left| \int_1^3 (x^3 - 3x^2 - x + 3) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_1^3 \right| \\
 &= \left| \left[\frac{81}{4} - 27 - \frac{9}{2} + 9 \right] - \left[\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3 \right] \right| = \left| \left[\frac{81}{4} - \frac{108}{4} - \frac{18}{4} + \frac{36}{4} \right] - \left[\frac{1}{4} - \frac{4}{4} - \frac{2}{4} + \frac{12}{4} \right] \right| \\
 &= \left| -\frac{9}{4} - \frac{7}{4} \right| = \left| -\frac{16}{4} \right| = \frac{16}{4} = 4FE
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.1.e)

1.) Zielfunktion aufstellen:

HB: $A = x \cdot t(x)$; wobei $t(x) =$ Wendetangente

NB: $t(x) = -3x + 5$; NB in HB einsetzen

Fkt: $f(x) = -3x^2 + 5x$; den Extremwert bestimmen

2.) 1. Ableitung bilden und den Extremwert berechnen:

$f'(x) = -6x + 5$; gleich Null setzen

a) notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$0 = -6x + 5 \quad | +6x$$

$$6x = 5 \quad | :6$$

$$x = \frac{5}{6}$$

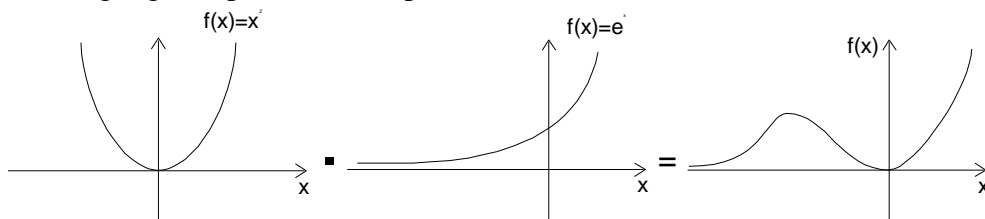
b) hinreichende Bedingung: $f''\left(\frac{5}{6}\right) \neq 0$

$$f''\left(\frac{5}{6}\right) = -6 < 0 \quad \text{d.h. Maximum f\u00fcr } x = \frac{5}{6}$$

c) Ergebnis: Das maximale Rechteck entsteht f\u00fcr $x = \frac{5}{6}$.

Aufgabe 2.2.a)

Vor\u00fcberlegung: Graphische Multiplikation der Parabel und der e -Funktion



Der Einflu\u00df der Exponentialfunktion ist gr\u00f6\u00dfer als der einer Potenzfunktion. Deshalb l\u00e4uft der Graph gegen Null, wenn x gegen minus Unendlich l\u00e4uft.

1) Definitionsbereich: $ID = \mathbb{R}$

2) Nullstelle:

$$0 = x^2 \cdot e^x$$

$$0 = x^2 \quad \vee \quad 0 = e^x$$

$$x_{1,2} = 0 \quad L = \{ \}$$

$$N(0/0)$$

3) Extremwerte (Maximum, Minimum)

a) notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x(x^2 + 2x)$$

$$0 = e^x(x^2 + 2x)$$

$$e^x = 0 \quad \vee \quad x^2 + 2x = x(x+2) = 0$$

$$L = \{ \} \quad x_1 = 0 \quad \vee \quad x + 2 = 0$$

$$x_2 = -2$$

b) hinreichende Bedingung: $f''(x_{1,2}) \neq 0$

$$f''(x) = e^x(x^2 + 2x) \cdot e^x(2x + 2) = e^{2x}(x^2 + 4x + 2)$$

$$f''(-2) = e^{-2}((-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 2) = \frac{1}{e^2}(4 - 8 + 2) = -\frac{2}{e^2} < 0 \quad \text{d.h. Maximum bei } x = -2$$

$$f''(0) = e^0(0^2 + 4 \cdot 0 + 2) = 1 \cdot 2 = 2 > 0 \quad \text{d.h. Minimum bei } x = 0$$

c) y-Koordinaten:

$$f(-2) = (-2)^2 \cdot e^{-2} = \frac{4}{e^2} \approx 0,541$$

$$f(0) = 0^2 \cdot e^0 = 0 \cdot 1 = 0$$

Ergebnisse: Maximum $\left(-2 / \frac{4}{e^2}\right)$ Minimum (0/0)

4.) Wendepunkte

a) notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$f''(x) = e^x(x^2 + 4x + 2)$$

$$0 = e^x(x^2 + 4x + 2)$$

$$e^x = 0 \quad \vee \quad x^2 + 4x + 2 = 0$$

$$L = \{ \} \quad x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-2}$$

$$x_1 = -2 + \sqrt{2} \approx -0,586$$

$$x_2 = -2 - \sqrt{2} \approx -3,41$$

b) hinreichende Bedingung: $f'''(x_{WP}) \neq 0$

$$f'''(x) = e^x(x^2 + 4x + 2) + e^x(2x + 4) = e^x(x^2 + 6x + 6)$$

$$f'''(-2 + \sqrt{2}) = e^{-2+\sqrt{2}} \left((-2 + \sqrt{2})^2 + 6(-2 + \sqrt{2}) + 6 \right) = \frac{e^{\sqrt{2}}}{e^2} (4 - 4\sqrt{2} + 2 - 12 + 6\sqrt{2} + 6)$$

$$= \frac{e^{\sqrt{2}}}{e^2} (2\sqrt{2}) > 0$$

d.h. Wendepunkt bei $x_1 = -2 + \sqrt{2}$ mit einem rechts-links Krümmungswechsel

$$f'''(-2 - \sqrt{2}) = e^{-2-\sqrt{2}} \left((-2 - \sqrt{2})^2 + 6(-2 - \sqrt{2}) + 6 \right) = \frac{1}{e^{2+\sqrt{2}}} (4 + 4\sqrt{2} + 2 - 12 - 6\sqrt{2} + 6)$$

$$= \frac{1}{e^{2+\sqrt{2}}} (-2\sqrt{2}) < 0$$

d.h. Wendepunkt bei $x_2 = -2 - \sqrt{2}$ mit einer links-rechts Krümmung

c) y-Koordinaten:

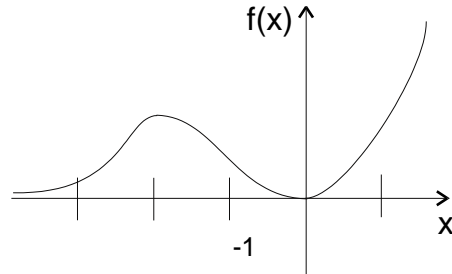
$$f(-2-\sqrt{2}) = (-2-\sqrt{2})^2 \cdot e^{-2-\sqrt{2}} \approx 0,384$$

$$f(-2+\sqrt{2}) = (-2+\sqrt{2})^2 \cdot e^{-2+\sqrt{2}} \approx 0,191$$

Ergebnisse: $WP_1(-2-\sqrt{2}; (-2-\sqrt{2})^2 \cdot e^{-2-\sqrt{2}})$ $WP_2(-2+\sqrt{2}; (-2+\sqrt{2})^2 \cdot e^{-2+\sqrt{2}})$

5) linker Rand: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ rechter Rand: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

6) Skizze:



Aufgabe 2.2.b)

$F(x)$ wird nach der Produktregel abgeleitet: $[u \cdot v]' = u'v + uv'$

$$F'(x) = f(x) = e^x(x^2 - 2x + 2) + e^x(2x - 2) = e^x(x^2 - 2x + 2x + 2 - 2) = e^x \cdot x^2$$

Aufgabe 2.2.c)

$$A = \int_0^2 x^2 e^x dx = \left[e^x(x^2 - 2x + 2) \right]_0^2 = (2e^2 - 2)FE$$

Aufgabe 2.2.d)

allgemeine Geradengleichung: $y = mx + b$; wobei m die Steigung $f'(x)$ ist

a) für die erste Wendetangente $t_1(x)$ gilt:

$$x = -2 - \sqrt{2}$$

$$y = f(-2 - \sqrt{2}) = (-2 - \sqrt{2})^2 \cdot e^{-2-\sqrt{2}}$$

$$m = f'(-2 - \sqrt{2}) = \left[(-2 - \sqrt{2})^2 + 2(-2 - \sqrt{2}) \right] \cdot e^{-2-\sqrt{2}} = (4 + 4\sqrt{2} + 2 - 4 - 2\sqrt{2}) \cdot e^{-2-\sqrt{2}} = (2 + 2\sqrt{2}) \cdot e^{-2-\sqrt{2}}$$

in die allgemeine Geradengleichung einsetzen und b berechnen:

$$(-2 - \sqrt{2})^2 \cdot e^{-2-\sqrt{2}} = (2 + 2\sqrt{2}) \cdot e^{-2-\sqrt{2}} \cdot (-2 - \sqrt{2}) + b \quad | - \left[(2 + 2\sqrt{2}) \cdot e^{-2-\sqrt{2}} \cdot (-2 - \sqrt{2}) \right]$$

$$\left[(-2 - \sqrt{2}) - (2 + 2\sqrt{2}) \cdot (-2 - \sqrt{2}) \right] \cdot e^{-2-\sqrt{2}} = b$$

$$\left[(-2 - \sqrt{2}) - (-4 - 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 4) \right] \cdot e^{-2-\sqrt{2}} = b$$

$$(-8 - 6\sqrt{2}) \cdot e^{-2-\sqrt{2}} = b$$

m und b in die Geradengleichung einsetzen:

$$t_1(x) = (2 + 2\sqrt{2}) \cdot e^{-2-\sqrt{2}} x + (-8 - 6\sqrt{2}) \cdot e^{-2-\sqrt{2}}$$

b) für die zweite Wendetangente $t_2(x)$ gilt:

$$x = -2 + \sqrt{2}$$

$$y = f(-2 + \sqrt{2}) = (-2 + \sqrt{2})^2 \cdot e^{-2+\sqrt{2}}$$

$$m = f'(-2 + \sqrt{2}) = \left[(-2 + \sqrt{2})^2 + 2(-2 + \sqrt{2}) \right] \cdot e^{-2+\sqrt{2}} = (4 - 4\sqrt{2} + 2 - 4 + 2\sqrt{2}) \cdot e^{-2+\sqrt{2}} = (2 - 2\sqrt{2}) \cdot e^{-2+\sqrt{2}}$$

in die allgemeine Geradengleichung einsetzen und b berechnen:

$$(-2 + \sqrt{2})^2 \cdot e^{-2-\sqrt{2}} = (2 - 2\sqrt{2}) \cdot e^{-2-\sqrt{2}} \cdot (-2 - \sqrt{2}) + b \quad | - \left[(2 - 2\sqrt{2}) \cdot e^{-2-\sqrt{2}} \cdot (-2 - \sqrt{2}) \right]$$

$$\left[(-2 - \sqrt{2}) - (2 - 2\sqrt{2}) \cdot (-2 - \sqrt{2}) \right] \cdot e^{-2-\sqrt{2}} = b$$

$$\left[(-2 - \sqrt{2}) - (-4 - 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 4) \right] \cdot e^{-2-\sqrt{2}} = b$$

$$(-2 - 3\sqrt{2}) \cdot e^{-2-\sqrt{2}} = b$$

m und b in die Geradengleichung einsetzen:

$$t_2(x) = (2 - 2\sqrt{2}) \cdot e^{-2-\sqrt{2}} x + (-2 - 3\sqrt{2}) \cdot e^{-2-\sqrt{2}}$$

Aufgabe 2.3.a)

1.) Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

da der Nenner keine Nullstellen hat

2.) Symmetrie

Prüfung auf Punktsymmetrie: Bedingung: $f(x) = -f(-x)$

$$\frac{8x}{x^2 + 3} = - \left(\frac{8 \cdot (-x)}{(-x)^2 + 3} \right) = - \frac{-8x}{x^2 + 3} = \frac{8x}{x^2 + 3}$$

Die Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

3.) Nullstellen; Bed.: $f(x) = 0$

$$0 = \frac{8x}{x^2 + 3} \quad | \cdot \text{Nenner}$$

$$0 = 8x \quad | : 8$$

$$0 = x$$

$$N(0; 0)$$

4.) keine Unstetigkeitsstellen, da der Definitionsbereich nicht eingeschränkt ist

5.) Extremwerte:

a) notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\text{Quotientenregel: } \left[\frac{u}{v} \right]' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{8 \cdot (x^2 + 3) - 8x \cdot 2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{8x^2 + 24 - 16x^2}{(x^2 + 3)^2}$$

$$0 = \frac{-8x^2 + 24}{(x^2 + 3)^2} \quad | \cdot \text{Nenner}$$

$$0 = -8x^2 + 24 \quad | +8x^2$$

$$8x^2 = 24 \quad | :8$$

$$x^2 = 3 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$$

b) hinreichende Bedingung: $f''(\pm\sqrt{3}) \neq 0$

$$f''(x) = \frac{-16x \cdot (x^2 + 3)^2 - (-8x^2 + 24) \cdot 2(x^2 + 3) \cdot 2x}{(x^2 + 3)^4} \quad | (x^2 + 3) \text{ kürzen}$$

$$f''(x) = \frac{-16x \cdot (x^2 + 3) - (-8x^2 + 24) \cdot 4x}{(x^2 + 3)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-16x^3 - 48x + 32x^3 - 96x}{(x^2 + 3)^3} = \frac{16x^3 - 144x}{(x^2 + 3)^3}$$

$$f''(\sqrt{3}) = \frac{16 \cdot \sqrt{3}^3 - 144 \cdot \sqrt{3}}{(\sqrt{3}^2 + 3)^3} = \frac{16 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} - 144 \cdot \sqrt{3}}{6^3} = -\frac{96 \cdot \sqrt{3}}{216} < 0$$

d.h. Maximum für $x = \sqrt{3}$

$$f''(-\sqrt{3}) = \frac{16 \cdot (-\sqrt{3})^3 - 144 \cdot (-\sqrt{3})}{\left[(-\sqrt{3})^2 + 3\right]^3} = \frac{16 \cdot 3 \cdot (-\sqrt{3}) - 144 \cdot (-\sqrt{3})}{6^3} = \frac{96 \cdot \sqrt{3}}{216} > 0$$

d.h. Minimum für $x = -\sqrt{3}$

c) y-Koordinaten: $f(x) = y$

$$f(\sqrt{3}) = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2 + 3} = \frac{8}{6}\sqrt{3} = \frac{4}{3}\sqrt{3} \quad \text{Maximum} \left(\sqrt{3} / \frac{4}{3}\sqrt{3} \right)$$

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{-8\sqrt{3}}{(-\sqrt{3})^2 + 3} = -\frac{8}{6}\sqrt{3} = -\frac{4}{3}\sqrt{3} \quad \text{Minimum} \left(-\sqrt{3} / -\frac{4}{3}\sqrt{3} \right)$$

6) Wendepunkte

a) notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$f''(x) = \frac{16x^3 - 144x}{(x^2 + 3)^3}$$

$$0 = \frac{16x^3 - 144x}{(x^2 + 3)^3} \quad | \cdot \text{Nenner}$$

$$0 = x \cdot (16x^2 - 144)$$

$$x_1 = 0 \quad \vee \quad 16x^2 - 144 = 0$$

$$16x^2 = 144 \quad | :16$$

$$x^2 = 9 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x_{2,3} = \pm 3$$

b) hinreichende Bedingung: $f'''(x_{WP}) \neq 0$

$$f'''(x) = \frac{(48x^2 - 144) \cdot (x^2 + 3)^3 - (16x^3 - 144x) \cdot 3(x^2 + 3)^2 \cdot 2x}{(x^2 + 3)^6} \quad |(x^2 + 3) \text{ kürzen}$$

$$f'''(x) = \frac{(48x^2 - 144) \cdot (x^2 + 3)^2 - (16x^3 - 144x) \cdot 6x \cdot (x^2 + 3)}{(x^2 + 3)^5}$$

$$f'''(x) = \frac{(48x^2 - 144) \cdot (x^4 + 6x^2 + 9) - (16x^3 - 144x) \cdot (6x^3 + 18x)}{(x^2 + 3)^5}$$

$$f'''(x) = \frac{(48x^6 + 144x^4 - 432x^2 - 1296) - (96x^6 - 576x^4 - 2592x^2)}{(x^2 + 3)^5}$$

$$f'''(x) = \frac{-48x^6 + 720x^4 - 2160x^2 - 1296}{(x^2 + 3)^5}$$

x-Werte einsetzen:

$$f'''(-3) = \frac{-48 \cdot (-3)^6 + 720 \cdot (-3)^4 - 2160 \cdot (-3)^2 - 1296}{[(-3)^2 + 3]^5} = \frac{2592}{12^5} > 0$$

$$f'''(0) = \frac{-48 \cdot 0^6 + 720 \cdot 0^4 - 2160 \cdot 0^2 - 1296}{(0^2 + 3)^5} = \frac{-1296}{3^5} < 0$$

$$f'''(3) = \frac{-48 \cdot 3^6 + 720 \cdot 3^4 - 2160 \cdot 3^2 - 1296}{(3^2 + 3)^5} = \frac{2592}{12^5} > 0$$

c) y-Koordinaten: $f(x) = y$

$$f(-3) = \frac{8 \cdot (-3)}{(-3)^2 + 3} = -\frac{24}{12} = -2 \quad \text{WP}_1 \quad (-3 / -2)$$

$$f(0) = \frac{8 \cdot 0}{0^2 + 3} = 0 \quad \text{WP}_2 \quad (0/0)$$

$$f(3) = \frac{8 \cdot 3}{3^2 + 3} = \frac{24}{12} = 2 \quad \text{WP}_3 \quad (3 / 2)$$

WP₁ (-3 / -2) mit einer rechts-links Krümmung

WP₂ (0/0) mit einer links-rechts Krümmung

WP₃ (3 / 2) mit einer rechts-links Krümmung

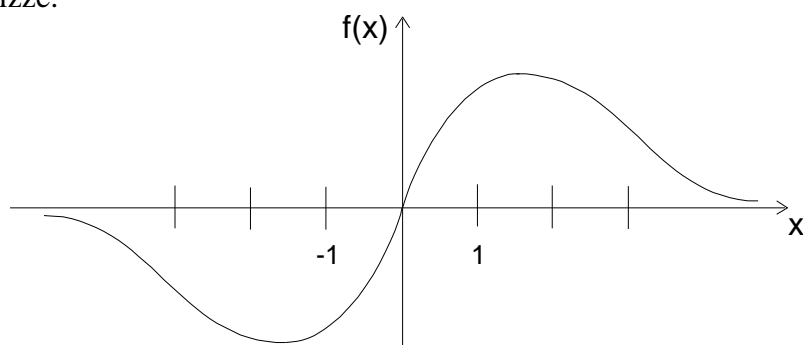
7.) Randverhalten:

Nenner und Zähler durch die höchste Nennerpotenz teilen.

$$\text{a) linker Rand: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{8x}{x^2 + 3} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\frac{8x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\frac{8}{x}}{1 + \frac{3}{x^2}} \right) = \frac{0}{1+0} = 0$$

$$\text{b) rechter Rand: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x}{x^2 + 3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{8x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{8}{x}}{1 + \frac{3}{x^2}} \right) = \frac{0}{1+0} = 0$$

8.) Skizze:



Aufgabe 2.4.a)

allgemeine Geradengleichung ist $g: \vec{x} = \vec{v} + t \vec{r}$

Verschiebungsvektor ist $\vec{v} = \vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Richtungsvektor ist $\vec{r} = \vec{q} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung: $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2.4.b)

x - y Ebene: $E_{xy}: \vec{x} = u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Gerade g_1 gleichsetzen ergibt

I) $u = 2 + t$

II) $v = 3$

III) $0 = 4 + t \Leftrightarrow t = -4$

t in die Geradengleichung einsetzen:

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + (-4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ergebnis: $SP(-2/3/0)$

Aufgabe 2.4.c)

x - z Ebene: $E_{xz}: \vec{x} = u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit Gerade g_1 gleichsetzen ergibt

- I) $u = 2 + t$
- II) $0 = 3 \rightarrow$ falsche Aussage, d.h. keine Lösung
- III) $v = 4 + t$

Ergebnis: es gibt keinen Spurpunkt auf der x - z Ebene

Aufgabe 2.4.d)

allgemeine Ebenengleichung ist $g: \vec{x} = \vec{v} + s\vec{r}_1 + t\vec{r}_2$

Verschiebungsvektor ist $\vec{v} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

1. Richtungsvektor ist $\vec{r}_1 = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. Richtungsvektor ist $\vec{r}_2 = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Lösung: $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2.4.e)

Punkt in die Ebenengleichung einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

ergibt das Gleichungssystem:

I) $1 = 4 - 3s \Leftrightarrow s = 1$

II) $2 = -2 + 2s + 2t$

III) $3 = 5 + 2s - 4t$

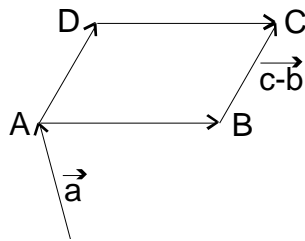
s in II) eingesetzt ergibt: $t = 1$

s, t in III) eingesetzt ergibt: $3 = 3$, d.h. wahre Aussage, Lösung ist auch für III) richtig

Lösung: Die Ebenengleichung ergibt für $s = 1$ und $t = 1$ den Punkt R .

Aufgabe 2.4.f)

Skizze:



Ortsvektor $\vec{d} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$ ergibt den Punkt D(7/-2/-1)

Aufgabe 2.4.g)

y-z Ebene: E_{yz} : $\vec{x} = u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; mit der Ebenengleichung E_1 gleichsetzen:

$$u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{I) } 0 = 4 - 3s \quad \Leftrightarrow \quad s = \frac{4}{3}$$

$$\text{II) } u = -2 + 2s + 2t$$

$$\text{III) } v = 5 + 2s - 4t$$

$$2 \cdot \text{II)} + \text{III) } \quad 2u + v = 1 + 8 \quad \Leftrightarrow \quad v = 9 - 2u$$

Zwischenlösung in die Ebenengleichung E_{yz} einsetzen:

$$\vec{x} = u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (9 - 2u) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Spurgerade } SG: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.4.h)

Bildung des Normalenvektors der Ebene E_1 :

$$\text{I) } -3x + 2y + 2z = 0 \quad \text{wähle } x = 1$$

$$\text{II) } 2y - 4z = 0$$

$$\text{I) } 2y + 2z = 3$$

$$\text{II) } 2y - 4z = 0$$

$$\text{I) - II) } \quad 6z = 3 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{1}{2}$$

$$z \text{ in II) } \quad 2y = 2 \quad \Leftrightarrow \quad y = 1$$

Normalenvektor von E_1 ist: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ strecke mit Faktor 2: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bildung der Normalenform der Ebenengleichung E_1 :

$$E_1: \vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{v} \cdot \vec{n}$$

$$\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 9$$

Bestimmung der Länge des Normalenvektors: $|\vec{n}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$$

Bildung der Hesseschen Normalenform: $0 = \frac{\vec{x} \cdot \vec{n} + \vec{v} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}$

$$0 = \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 9}{3}$$

Berechnung des Abstandes zum Punkt S ; dazu die Koordinaten von S für \vec{x} einsetzen:

$$|SE_1| = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 9}{3} = \frac{6 + 8 + 4 + 9}{3} = \frac{27}{3} = 9LE$$

Der Abstand der Ebene E_1 zum Punkt S beträgt $d = 9LE$

Aufgabe 2.4.i)

Die Ebenen- und die Geradengleichung gleichsetzen: $E_1 = g_1$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
\text{I)} \quad 4 - 3s = 2 + k \quad | -4 - k \\
\text{II)} \quad -2 + 2s + 2t = 3 \quad | +2 \\
\text{III)} \quad 5 + 2s - 4t = 4 + k \quad | -5 - k \\
\hline
\text{I)} \quad -3s - k = -2 \\
\text{II)} \quad 2s + 2t = 5 \\
\text{III)} \quad 2s - 4t - k = -1 \quad | 2 \cdot \text{II} + \text{III} = \text{III} \\
\hline
\text{I)} \quad -3s - k = -2 \\
\text{II)} \quad 2s + 2t = 5 \\
\text{III)} \quad 6s - k = 9 \quad | 2 \cdot \text{I} + \text{III} = \text{I} \\
\hline
\text{I)} \quad -3k = 5 \quad \Leftrightarrow \quad k = -\frac{5}{3} \\
\text{II)} \quad 2s + 2t = 5 \\
\text{III)} \quad 6s - k = 9
\end{array}$$

Lösung $t = -\frac{5}{3}$ in g_1 einsetzen ergibt $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{5}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$

Der Durchdringungspunkt ist $SP\left(\frac{1}{3} / 3 / \frac{7}{3}\right)$

Der Winkel zwischen dem Normalenvektor der Ebene und dem Richtungsvektor der Geraden berechnen und das Ergebnis von 90° subtrahieren:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{r}|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1}{3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ$$

Das ist der Winkel zwischen dem Normalenvektor der Ebene und der Geraden. Der Winkel zwischen Ebene und Gerade ist die Differenz zu 90° :

Lösung: $\alpha = 90^\circ - 54,74^\circ = 35,26^\circ$

Aufgabe 2.4.k)

Verschiebungsvektor ist der Ortsvektor von Punkt T , Richtungsvektor ist der Normalenvektor der Ebene E_1

Lösung: $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2.5.a)

Beim 2-maligen Würfeln gibt es 36 mögliche Ereignisse. Davon ergeben 15 Ereignisse die Augensumme ≤ 6 und 21 Ereignisse die Augensumme ≥ 7 . Dick hat eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $\frac{15}{36}$. Doof hat eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $\frac{21}{36}$. Doof hat eine größere Gewinnwahrscheinlichkeit. Das Spiel ist nicht fair.

Aufgabe 2.5.b)

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 21 \cdot \frac{1}{6} = 3,5$$

$$V(X) = (1-3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2-3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + (6-3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} = 17,5 \cdot \frac{1}{6} = 2,92$$

Aufgabe 2.5.c)

Berechnung der Gegenwahrscheinlichkeit: mit höchstens 0,01%iger Sicherheit keine „6“

$$P(X) = \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0,01$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0,01 \quad | \log$$

$$\log\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq \log 0,01 \quad | 3. \text{Logarithmengesetz : } \log a^n = n \cdot \log a$$

$$n \cdot \log\left(\frac{5}{6}\right) \leq \log 0,01 \quad | : \log\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$n \geq \frac{\log 0,01}{\log\left(\frac{5}{6}\right)}$$

Bei der Division durch eine negative Zahl dreht sich das Ungleichheitszeichen um!

Ergebnis: $n \geq 26$

Aufgabe 2.5.d)

1) $P(X) = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$

2) Wahrscheinlichkeiten für:

a) 3 gleiche Zahlen: $P(X) = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$

b) 2 gleiche Zahlen: $P(X) = 6 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{90}{216} = \frac{15}{36}$

c) Wahrscheinlichkeit für 3 ungleiche Zahlen ist $P(X) = 1 - \frac{1}{36} - \frac{15}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

3) Wahrscheinlichkeiten für:

a) genau 2-mal die „6“: $P(X) = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{15}{216}$

b) genau 3-mal die „6“: $P(X) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$

c) Wahrscheinlichkeit für mindestens 2-mal die „6“ ist $P(X) = \frac{15}{216} + \frac{1}{216} = \frac{16}{216} = \frac{2}{27}$

Aufgabe 2.5.e)

Laut Aufgabe 2.5.b) ist der Erwartungswert $E(X) = 3,5$. Danach müsste für ein faires Spiel der Einsatz 3,50 € betragen.

Aufgabe 2.5.f)

Berechnung des Erwartungswerts:

$$E(X) = 100 \cdot \frac{1}{6} = \frac{100}{6} = \frac{50}{3} = 16,67$$

Berechnung der k -Werte bei einer 2σ Umgebung:

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 3,73 \quad 2\sigma = 7,45$$

$$k\text{-Werte: } E(X) - 2\sigma \leq k \leq E(X) + 2\sigma \quad 10 \leq k \leq 24$$

Bei einer Toleranz von 2σ sind bei 100 Wiederholungen zwischen 10- und 24-mal die Augenzahl „6“ zu erwarten.