Lösung der Abitur-Übung 1:

Aufgabe 1.1.a)

Funktion allgemein:	$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$	
Ableitungen allgemein:	$f'(x)=3ax^2+2bx+c$	
	$f''(x)=6ax+2b$	
bei $x=4$ die x-Achse	$f(4)=0$	$0=64a+16b+4c+d$
bei $x=2$ ist $y=-4x+16$	$f(2)=8$	$8=8a+4b+2c+d$
berührt bei $x=4$	$f'(4)=0$	$0=48a+8b+c$
bei $x=2$ ist $m=-4$	$f'(2)=-4$	$-4=12a+4b+c$

Gleichungssystem:

I)	$0=64a+16b+4c+d$	
II)	$8=8a+4b+2c+d$	
III)	$0=48a+8b+c$	
IV)	$-4=12a+4b+c$	
I)	$0=64a+16b+4c+d$	
I-II=II)	$-8=56a+12b+2c$	
III)	$0=48a+8b+c$	
IV)	$-4=12a+4b+c$	
I)	$0=64a+16b+4c+d$	
II)	$-8=56a+12b+2c$	
III-IV=III)	$4=36a+4b$	
IV)	$-4=12a+4b+c$	
I)	$0=64a+16b+4c+d$	
II)	$-8=56a+12b+2c$	
III)	$4=36a+4b$	
II-2·IV=IV)		$0=32a+4b$
I)	$0=64a+16b+4c+d$	
II)	$-8=56a+12b+2c$	
III)	$4=36a+4b$	
III-IV=IV)	$4=4a$	$\underline{\underline{a=1}}$
a in III)	$4=36+4b$	$\underline{\underline{b=-8}}$
a,b in II)	$-8=56-96+2c$	$\underline{\underline{c=16}}$
a,b,c in I)	$0=64-128+64+d$	$\underline{\underline{d=0}}$

Ergebnis: $f(x)=x^3-8x^2+16x$

Aufgabe 1.1.b)

1.) Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}$

2.) Nullstellen, Bedingung: $f(x)=0$

$$0=x^3-8x^2+16x=x(x^2-8x+16)$$

$$x_1=0 \quad \vee \quad x^2-8x+16=0$$

$$x_{2,3}=4\pm\sqrt{0}$$

$$x_{2,3}=4$$

$N_1\ (0/0)$ $\qquad$ $N_{2;3}\ (4/0)$

3.) Extremwerte (Maximum, Minimum)

a) notwendige Bedingung: $f'(x)=0$

$f'(x) = 3x^2 - 16x + 16$

$0 = 3x^2 - 16x + 16$ | : 3

$0 = x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{16}{3}$ | mit pq-Formel lösen

$x_{1,2} = \frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{64}{9} - \frac{48}{9}}$

$x_{1,2} = \frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9}}$ $x_1 = \frac{4}{3}$ und $x_2 = 4$

b) hinreichende Bedingung: $f''(x_{1,2}) \neq 0$

$f''(x) = 6x - 16$

$f''\left(\frac{4}{3}\right) = 6 \cdot \left(\frac{4}{3}\right) - 16 = -\frac{24}{3} < 0$ dh. Maximum bei $x = \frac{4}{3}$

$f''(4) = 6 \cdot 4 - 16 = 8 > 0$ dh. Minimum bei $x = 4$

c) y-Koordinaten:

$f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 8 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 16 \cdot \frac{4}{3} = \frac{256}{27}$

$f(4) = 4^3 - 8 \cdot 4^2 + 16 \cdot 4 = 0$

Maximum $\left(\frac{4}{3} \Big/ \frac{256}{27}\right)$

Minimum $(4/0)$

4.) Wendepunkt

a) notwendige Bedingung: $f''(x)=0$

$f''(x) = 6x - 16$

$0 = 6x - 16$ |+16 |:6

$x_1 = \frac{8}{3}$

b) hinreichende Bedingung: $f'''\left(\frac{8}{3}\right) \neq 0$

$f'''(x) = 6$

$f'''\left(\frac{8}{3}\right) = 6 > 0$ dh. Wendepunkt bei $x = \frac{8}{3}$ mit einer rechts-links Krümmung

c) y-Koordinate: $f\left(\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}\right)^3 - 8 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2 + 16 \cdot \frac{8}{3} = \frac{128}{27}$

Ergebnis: $WP\ \left(\frac{8}{3} \Big/ \frac{128}{27}\right)$

5.) Randverhalten

a) Verhalten des Graphen für $x \to +\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^3\left(\frac{x^3}{x^3} - \frac{8x^2}{x^3} + \frac{16x}{x^3}\right)\right]$ | höchste Potenz ausgeklammert

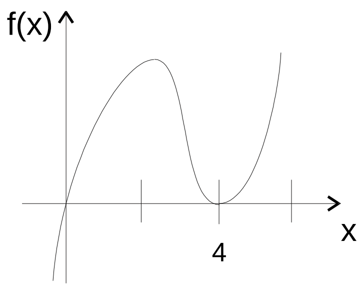
$= \lim\limits_{x\to\infty}\left[x^3\left(1 - \frac{8}{x} + \frac{16}{x^2}\right)\right] = \infty \cdot (1 - 0 + 0) = \infty$

b) Verhalten des Graphen für $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x^3\left(\frac{x^3}{x^3}-\frac{8x^2}{x^3}+\frac{16x}{x^3}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[x^3\left(1-\frac{8}{x}+\frac{16}{x^2}\right)\right]=-\infty\cdot(1-0+0)=-\infty$$

6.) Skizze:



Aufgabe 1.1.c)

$$A=\left|\int_0^4 (x^3-8x^2+16x)dx\right|=\left|\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{8}{3}x^3+8x^2\right]_0^4\right|$$

$$=\left|\left[\frac{1}{4}4^4-\frac{8}{3}4^3+8\cdot 4^2\right]-[0]\right|=\left|\frac{64}{3}\right|=\frac{64}{3}FE$$

Aufgabe 1.1.d)

HB: $A=\frac{1}{2}\cdot g\cdot h$

NB: mit $g=x$ und $h=y$ gilt $y=x^3-8x^2+16x$

Fkt: $f(x)=\frac{1}{2}x(x^3-8x^2+16x)=\frac{1}{2}x^4-4x^3+8x^2$ $\mathbb{D}=\mathbb{R}/\{0\leq x\leq 4\}$

Extremwert:

a) notwendige Bedingung: $f'(x)=0$

$$f'(x)=2x^3-12x^2+16x$$
$$0=2x^3-12x^2+16x$$
$$0=x(2x^2-12x+16)$$
$$x_1=0 \quad\vee\quad 2x^2-12x+16=0 \quad |:2$$
$$x^2-6x+8=0$$
$$x_{2,3}=3\pm\sqrt{9-8}$$
$$x_2=4 \quad x_3=2$$

für $x_1=0$ und $x_2=4$ ist keine Fläche vorhanden

b) hinreichende Bedingung: $f''(2)\neq 0$

$$f''(x)=6x^2-24x+16$$
$$f''(2)=24-48+16=-8<0$$ d.h. Maximum für $x=2$

Ergebnis: $x_0=2$

Aufgabe 1.1.e)

gesucht ist ein weiterer Punkt mit der Steigung m=-4
d.h. die 1.Ableitung muß =-4 gesetzt werden

$-4 = 3x^2 - 16x + 16 \qquad |+4$

$0 = 3x^2 - 16x + 20 \qquad |:3$

$0 = x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{20}{3} \qquad$ |mit pq-Formel oder quadratischer Ergänzung lösen

$x_1 = \frac{10}{3} \quad x_2 = 2 \qquad$ |gesuchter Wert ist x_1

y-Koordinate:

$f\left(\frac{10}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}\right)^3 - 8\cdot\left(\frac{10}{3}\right)^2 + 16\cdot\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{40}{27}$

Ergebnis: $P\left(\frac{10}{3} \Big/ \frac{40}{27}\right)$

Aufgabe 1.2.a)

1.) Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

2.) Nullstellen, Bedingung: $f(x) = 0$

$0 = -x + e^x$

$x = e^x$ | hat keine Lösung; es gibt keinen Schnittpunkt der beiden Graphen

$\mathbb{L} = \{\ \}$

3.) Extremwerte (Maximum, Minimum)

a) notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$f'(x) = -1 + e^x$

$0 = -1 + e^x \qquad | +1$

$e^x = 1 \qquad | \ln$

$x = \ln 1$

$x = 0$

b) hinreichende Bedingung: $f''(0) \neq 0$

$f''(x) = e^x$

$f''(0) = e^0 = 1 \qquad > 0$ d.h. Minimum

c) y-Koordinaten: $f(0) = -0 + e^0 = 1$

Ergebnis: Minimum $(0/1)$

4.) Wendepunkt

a) notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$f''(x) = e^x$

$0 = e^x \qquad$ | e^x hat keine Nullstelle

$\mathbb{L} = \{\ \}$

5.) Randverhalten

a) Verhalten des Graphen für $x \to +\infty$

$f(x) = -x + e^x \qquad$ im positiven Bereich läuft -x gegen -∞, e^x gegen +∞,
da Exponentialfunktionen schneller wachsen, gilt

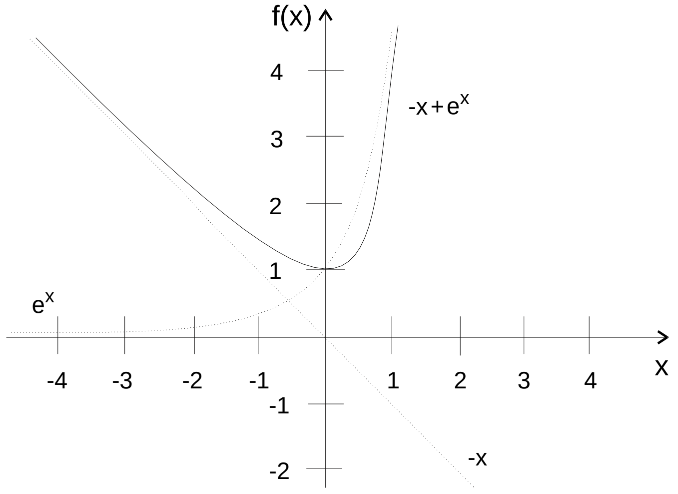
$\lim_{x\to\infty}\left[-x + e^x\right] = +\infty$

b) Verhalten des Graphen für $x \to -\infty$

$f(x) = -x + e^x$ im negativen Bereich läuft -x gegen $+\infty$, e^x gegen 0, für die Summe gilt

$$\lim_{x \to -\infty}\left[-x + e^x\right] = +\infty$$

6.) Skizze:



Aufgabe 1.2.b)

Die Funktion e^x läuft für $x \to -\infty$ gegen Null.

Ist k ungerade, d.h. $k \in \{1;3;5\ldots\}$,so ist x^k für $x \to -\infty$ negativ.
Damit ist die Summe $x^k + e^x$ auch negativ, der Grenzwert ist $-\infty$.

Ist k gerade, d.h. $k \in \{2;4;6\ldots\}$,so ist x^k für $x \to -\infty$ positiv.
Damit ist die Summe $x^k + e^x$ auch positiv, der Grenzwert ist ∞.

Aufgabe 1.3.a)

1.) Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Die Nullstellen des Nenners dürfen nicht für x eingesetzt werden.

2.) Nullstellen $f(x) = 0$

$$0 = \frac{x}{x-1} \qquad | \cdot \text{Nenner}$$

$0 = x$

$N(0/0)$

3.) Verhalten an der Unstetigkeitsstelle

a) linksseitiger Grenzwert (x = 1 - h)

$$\lim_{h \to 0}\left(\frac{1-h}{1-h-1}\right) = \lim_{h \to 0}\left(\frac{1-h}{-h}\right) = -\infty$$

b) rechtsseitiger Grenzwert (x = -2 + h)

$$\lim_{h \to 0}\left(\frac{1+h}{1+h-1}\right) = \lim_{h \to 0}\left(\frac{1+h}{h}\right) = \infty$$

4.) Extremwerte (Maximum, Minimum)

a) notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - x \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

Da der Zähler nicht Null werden kann, hat die 1.Ableitung keine Nullstellen, der Graph keine Extremwerte.

5.) Wendepunkte

a) notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$f''(x) = \frac{0 \cdot (x-1)^2 - (-1) \cdot 2(x-1) \cdot 1}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

Da der Zähler nicht Null werden kann, hat die 2.Ableitung keine Nullstellen, der Graph keine Wendepunkte.

6.) Randverhalten

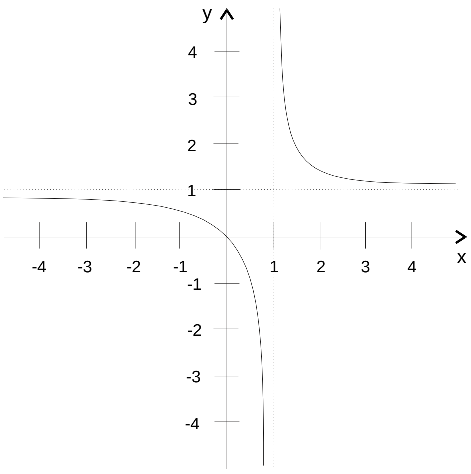
a) Verhalten des Graphen für $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{1-0} = 1$$

b) Verhalten des Graphen für $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{1+0} = 1$$

7.) Skizze



Aufgabe 1.4.a)

Verschiebungsvektor: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

1. Richtungsvektor: $\vec{r}_1 = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 1-1 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. Richtungsvektor: $\vec{r}_2 = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 0-1 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ebenengleichung: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 1.4.b)

$$\begin{pmatrix}12\\-2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

1. und 2. Zeile:	I)	$12=2-2r+2s$	
	II)	$-2=1-s$	$s=3$
	s in I)	$12=2-2r+6$	$r=-2$
mit 3.Zeile überprüfen:	r,s in III)	$-2=2-4$ wahre Aussage	

Ergebnis: Punkt D liegt in der Ebene

Aufgabe 1.4.c)

x-*y*-Ebene ist $E_{xy}: \vec{x}=u\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

gleichsetzen mit der Ebenengleichung ergibt folgendes Gleichungssystem:

I)	$u=2-2r+2s$	
II)	$v=1-s$	$s=1-v$
III)	$0=2+2r$	$r=-1$
r in I)	$u=2+2+2s$	
II in I)	$u=4+2(1-v)$	$u=6-2v$

in die Gleichung der *x*-*y*-Ebene einsetzen:

$$g_{xy}:(6-2v)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+v\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=6\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-2v\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+v\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.4.d)

Ursprungsgerade durch *A*: $g: \vec{x}=t\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

Normalenvektor der Ebene: $\vec{n}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$,wobei $\vec{n}\perp\vec{r}_1 \wedge \vec{n}\perp\vec{r}_2$

D.h. die Skalarprodukte von Normalenvektor und den Richtungsvektoren müssen = 0 sein.

Gleichungssystem:	I)	$-2x+0y+2z=0$	
	II)	$2x-1y+0z=0$	| gewählt: $y=2$
	I)	$-2x+2z=0$	
	II)	$2x=2$	| $x=1$
	x,y in I)	$-2=-2z$	| $z=1$

Ergebnis: $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

Schnittwinkel des Richtungsvektors der Geraden mit dem Normalenvektor der Ebene:

$$\cos\alpha=\frac{\vec{r}_g\cdot\vec{n}}{|\vec{r}_g|\cdot|\vec{n}|}=\frac{2\cdot1+1\cdot2+2\cdot1}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\frac{6}{3\cdot\sqrt{6}}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{2\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{2\cdot\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$\alpha = 35{,}3°$

Schnittwinkel ist 90° minus Ergebnis, um den Winkel zwischen Gerade und Ebene zu erhalten:

$\gamma = 90° - 35{,}3° = 54{,}7°$

Aufgabe 1.4.e)

Ohne Verschiebungsvektor wird aus der Ebene eine Ursprungsebene:

$$E_2 : \vec{x} = r\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.4.f)

Länge des Normalenvektors berechnen: $|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

Normieren des Normalenvektors: $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Abstand berechnen:

$$|0E| = \vec{n}_0 \cdot \vec{v}_E = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \frac{6 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{6 \cdot \sqrt{6}}{6} = \sqrt{6}\ LE$$

Aufgabe 1.5.a)

Die Ergebnisse werden in der kumulierten Binomialtabelle abgelesen:

1) $n=10,\ k=3$ → $P(X \le 3) = 0{,}6496$

2) $n=10,\ k=3$ minus $k=2$ → $P(X=3) = 0{,}2668$

3) $n=10,\ k=2$ → $1-P(X \le 2) = 0{,}6172$

4) $n=10,\ k=3$ → $1-P(X \le 3) = 0{,}3504$

Aufgabe 1.5.b)

$E(X) = n \cdot p = 10 \cdot 0{,}3 = 3$ Kugeln

Aufgabe 1.5.c)

Für 0mal „weiß“ ist die Wahrscheinlichkeit: $P(X=0) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{42}{90}$

Für 1mal „weiß“ ist die Wahrscheinlichkeit: $P(X=1) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} + \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{42}{90}$

Für 2mal „weiß“ ist die Wahrscheinlichkeit: $P(X=2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{90}$

zu erwartender Gewinn:

$$E(X) = 1{,}00€ \cdot \frac{42}{90} + 2{,}00€ \cdot \frac{42}{90} + 3{,}00€ \cdot \frac{6}{90} = 1{,}60€ = \text{fairer Einsatz}$$

Aufgabe 1.5.d)

Für drei weiße Kugeln gilt: $P(X = 3w) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{6}{720}$

Für drei schwarze Kugeln gilt: $P(X = 3s) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{210}{720}$

Ergebnis: $P(X) = \frac{6}{720} + \frac{210}{720} = \frac{216}{720} = \frac{3}{10}$