Lagebestimmung zweier Geraden

Gegeben ist die Gerade $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Bestimme die Lage von g_1 zu den Geraden g_2 bis g_5! Ermittle ggf. den Schnittpunkt!

$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ -10 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$

$g_4: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $g_5: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

Lösung 1: g_1 und g_2

1. Untersuchung: Sind die Richtungsvektoren linear abhängig?

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ -10 \end{pmatrix} \qquad | \text{ zeilenweise schreiben}$$

$$3 = -6k \quad \Leftrightarrow \quad k = -\frac{1}{2}$$

$$4 = -8k \quad \Leftrightarrow \quad k = -\frac{1}{2}$$

$$5 = -10k \quad \Leftrightarrow \quad k = -\frac{1}{2}$$

Gemeinsames k, d.h. die Richtungsvektoren sind linear abhängig, die Geraden können identisch oder parallel sein.

2. Untersuchung: Sind der Verbindungsvektor der beiden Fußpunkte und ein Richtungsvektor linear abhängig?

Verbindungsvektor: $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad | \text{ zeilenweise schreiben}$$

$$-3 = 3k \quad \Leftrightarrow \quad k = -1$$
$$-4 = 4k \quad \Leftrightarrow \quad k = -1$$
$$-5 = 5k \quad \Leftrightarrow \quad k = -1$$

Gemeinsames k ,d.h. die Vektoren sind linear abhängig,
die Geraden g_1 und g_2 sind identisch.

Lösung 2: g_1 und g_3

1. Untersuchung: Sind die Richtungsvektoren linear abhängig?

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix} \qquad | \text{ zeilenweise schreiben}$$

$$3 = 9k \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{1}{3}$$
$$4 = 12k \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{1}{3}$$
$$5 = 15k \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{1}{3}$$

Gemeinsames k, d.h. die Richtungsvektoren sind linear abhängig,
die Geraden können identisch oder parallel sein.

2. Untersuchung: Sind der Verbindungsvektor der beiden Fußpunkte und ein Richtungsvektor linear abhängig?

Verbindungsvektor: $\vec{v}_3 - \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad | \text{ zeilenweise schreiben}$$

$$1 = 3k \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{1}{3}$$
$$1 = 4k \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{1}{4}$$
$$1 = 5k \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{1}{5}$$

Kein gemeinsames k ,d.h. die Vektoren sind linear unabhängig,
die Geraden g_1 und g_3 sind parallel.

Lösung 3: g_1 und g_4

1. Untersuchung: Sind die Richtungsvektoren linear abhängig?

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad | \text{ zeilenweise schreiben}$$

$$3 = 2k \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{3}{2}$$

$$4 = 3k \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{4}{3}$$

$$5 = 4k \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{5}{4}$$

Kein gemeinsames k, d.h. die Richtungsvektoren sind linear unabhängig, die Geraden können sich schneiden oder windschief sein.

2. Untersuchung: Sind der Verbindungsvektor der beiden Fußpunkte und beide Richtungsvektoren linear abhängig?

Verbindungsvektor: $\vec{v}_4 - \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad | \text{ zeilenweise schreiben}$$

$$\begin{array}{rr}
\text{I)} & 6 = 3k + 2l \\
\text{II)} & 8 = 4k + 3l \\
\text{III)} & 10 = 5k + 4l \\
\hline
3 \cdot \text{I)} & 18 = 9k + 6l \\
2 \cdot \text{II)} & 16 = 8k + 6l \\
\hline
 & 2 = k
\end{array} \qquad -$$

k in I) einsetzen:

$$\begin{aligned}
6 &= 3 \cdot 2 + 2l && | -6 \\
0 &= 2l && | : 2 \\
l &= 0
\end{aligned}$$

l und k mit III) überprüfen:

$$\begin{aligned}
10 &= 5 \cdot 2 + 4 \cdot 0 \\
10 &= 10
\end{aligned}$$

Wahre Aussage, d.h. die Vektoren sind linear abhängig,
die Geraden g_1 und g_4 schneiden sich.

Bestimmung des Schnittpunktes (Geradengleichungen gleichsetzen: $g_1 = g_4$)

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\10\\13\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} \qquad \Big| -\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-s\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$$

$$r\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\-3\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\8\\10\end{pmatrix} \qquad \text{| zeilenweise schreiben}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{I)} & 3r-2s=6\\
\text{II)} & 4r-3s=8\\
\text{III)} & 5r-4s=10\\
\hline
2\cdot\text{I)} & 6r-4s=12\\
\text{III)} & 5r-4s=10\\
\hline
 & r=2
\end{array}$$

$r = 2$ in die Geradengleichung g_1 einsetzen:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}7\\10\\13\end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt ist SP (7 / 10 / 13)

Lösung 4: g_1 und g_5

1. Untersuchung:Sind die Richtungsvektoren linear abhängig?

$$\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}4\\-1\\6\end{pmatrix} \qquad \text{| zeilenweise schreiben}$$

$$3=4k \quad \Leftrightarrow \quad k=\frac{3}{4}$$

$$4=-k \quad \Leftrightarrow \quad k=-4$$

$$5=6k \quad \Leftrightarrow \quad k=\frac{5}{6}$$

Kein gemeinsames k, d.h. die Richtungsvektoren sind linear unabhängig, die Geraden können sich schneiden oder windschief sein.

2. Untersuchung: Sind der Verbindungsvektor der beiden Fußpunkte und beide Richtungsvektoren linear abhängig?

Verbindungsvektor: $\vec{v}_5 - \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad | \text{ zeilenweise schreiben}$$

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & 1 = 3k + 4l \\ \text{II)} \quad & 1 = 4k - 1l \\ \text{III)} \quad & 1 = 5k + 6l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & 1 = 3k + 4l \\ 4 \cdot \text{II)} \quad & 4 = 16k - 4l \end{aligned} \quad +$$

$$5 = 19k \qquad |:19$$

$$k = \frac{5}{19}$$

k in I) einsetzen:

$$1 = 3 \cdot \frac{5}{19} + 4l \qquad \left| -\frac{15}{19} \right.$$

$$\frac{4}{19} = 4l \qquad |:4$$

$$l = \frac{1}{19}$$

l und k mit III) überprüfen:

$$1 = 5 \cdot \frac{5}{19} + 6 \cdot \frac{1}{19}$$

$$1 = \frac{25}{19} + \frac{6}{19}$$

$$1 = \frac{31}{19}$$

Falsche Aussage, d.h. die Vektoren sind linear unabhängig, die Geraden g_1 und g_5 sind windschief.

Aufgaben:
Untersuche die Lage der Geraden g_1 und g_2, sowie g_1 und g_3, sowie g_2 und g_3 zueinander:

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad g_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 18 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix}$$