

## kgV (Das kleinste gemeinsame Vielfache)

Glebe 04/01

Beim Addieren oder Subtrahieren von Brüchen müssen die Nenner gleich sein. Man spricht dann vom Hauptnenner. Um den Hauptnenner zu bilden, müssen die Brüche erweitert werden. Erweitern heißt, den Zähler und den Nenner mit der gleichen Zahl zu multiplizieren.

Beispiel 1:

Ein Nenner ist bereits das Vielfache des anderen.

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} + \frac{5}{6} &= && \text{die 3 muss mit 2 multipliziert werden, um auf 6 zu kommen} \\ \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} + \frac{5}{6} &= && \text{beim Erweitern den Zähler und Nenner mit 2 multiplizieren} \\ \frac{4}{6} + \frac{5}{6} &= \frac{9}{6} = \frac{3}{2} && \text{Zähler addieren, Nenner beibehalten, wenn möglich, kürzen} \end{aligned}$$

Beispiel 2:

Ein Nenner ist nicht das Vielfache des anderen.

$$\frac{5}{84} + \frac{11}{105} = \quad \text{die Nenner werden in Primfaktoren zerlegt}$$

Primzahlen können nur durch 1 oder durch sich selbst ohne Rest geteilt werden.

Beispiele für Primzahlen sind: 1; 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23 usw.

Zerlegung von 84:  $84 = 2 \cdot 42 = 2 \cdot 2 \cdot 21 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$

Zerlegung von 105:  $105 = 3 \cdot 35 = 3 \cdot 5 \cdot 7$

Dabei wird versucht, die Zahl zunächst durch 2, dann durch 3, dann durch 5 usw. zu teilen. Zur Bestimmung des kgV werden die ermittelten Primfaktoren in eine Tabelle eingetragen. In die kgV-Zeile werden alle Primfaktoren der darüber liegenden Zeilen eingetragen. Und zwar nur einmal, auch wenn er, wie die 3 und die 7, mehrmals vorkommt. In keiner Spalte dürfen zwei unterschiedliche Faktoren stehen.

84 =	2	2	3		7	
105 =			3	5	7	
kgV =	2	2	3	5	7	= 420

Multipliziert man die Primfaktoren in der kgV-Zeile ( $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ ), erhält man das kgV (420). Nun können wir die Brüche addieren.

$$\frac{5 \cdot 5}{84 \cdot 5} + \frac{11 \cdot 4}{105 \cdot 4} = \frac{25}{420} + \frac{44}{420} = \frac{25 + 44}{420} = \frac{69}{420} = \frac{23}{140}$$

Aufgabe:

Das kgV zweier Zahlen  $a$  und  $b$  ist 2772. Die Zahl  $a$  ist 198. Wie lautet die Zahl  $b$ , wenn sie möglichst klein sein soll?

Die Primfaktorzerlegung lautet:

$$\begin{aligned} \text{Zerlegung von 2772: } 2772 &= 2 \cdot 1386 = 2 \cdot 2 \cdot 693 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 231 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 77 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \end{aligned}$$

$$\text{Zerlegung von 198: } 198 = 2 \cdot 99 = 2 \cdot 3 \cdot 33 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 =$$

Tragen wir die Faktoren in die Tabelle ein.

198 =	2		3	3		11	
$b = ?$							
kgV =	2	2	3	3	7	11	= 2772

Jetzt müssen wir in der Zeile der Zahl  $b$  alle Faktoren ergänzen, damit die Tabelle stimmt. Es fehlen zweimal die 2 und einmal die 7. Wenn im kgV ein Faktor mehrfach vorkommt, muss dieser Faktor in einer der Zahlen  $b$  genauso oft eingetragen werden. Da bei der 198 der Faktor 2 nur einmal vorkommt, muss er bei  $b$  zweimal eingetragen werden. Der Faktor 3 kommt ebenfalls im kgV doppelt vor, steht aber schon doppelt in der Zerlegung der 198. Deshalb benötigt  $b$  diesen Faktor nicht mehr. Das Produkt dieser Faktoren ist die Zahl  $b$ .

198 =	2		3	3		11	
$b = 28$	2	2			7		
kgV =	2	2	3	3	7	11	= 2772

Übungen

1. Zerlege die Zahlen  $a$  und  $b$  in ihre Primfaktoren und bestimme das kgV!

a.  $a = 8 ; b = 10$

b.  $a = 27 ; b = 15$

c.  $a = 45 ; b = 25$

d.  $a = 120 ; b = 82$

Lösungen:

a. kgV = 40

b. kgV = 135

c. kgV = 225

d. kgV = 4920

2. Bestimme alle Primzahlen von 1 bis 100!