Kurvendiskussion

Glege 07/94

[Texte in eckigen Klammern [...] sind zusätzliche Kommentare.]

Diskutiert wird die gebrochen-rationale Funktion $f(x) = \frac{2x-6}{x+2}$

1. Definitionsbereich

[Eine gebrochen-rationale Funktion ist an den Nullstellen des Nenners nicht definiert, da durch Null nicht dividiert werden darf. Hat eine Funktion keine Nennernullstellen, z.B. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, ist der Definitionsbereich nicht eingeschränkt, dh. $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.]

Nullstellen des Nenners: $x + 2 = 0 \quad | -2$

$x = -2$

[Damit ist der Definitionsbereich die Menge der rationalen Zahlen mit Ausnahme des Elementes "-2".]

Ergebnis: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{ -2 \}$

2. Nullstellen Bedingung: Zähler = 0

[Ein Bruch ist immer dann Null, wenn sein Zähler Null ist.]

Nullstellen des Zählers: $2x - 6 = 0 \quad | +6$

$2x = 6 \quad | :2$

$x = 3$

Ergebnis: N (3/0)

3. Schnittpunkt mit der *y*-Achse Bedingung: x = 0

[Für alle *x* die Null einsetzen.]

Berechnung: $f(x) = \frac{2 \cdot 0 - 6}{0 + 2}$

$f(x) = -3$

Ergebnis: SP_y (0/-3)

4. Verlauf des Graphen am Rande des Definitionsbereiches (=Randverhalten)

[Der Zähler und Nenner werden durch die höchste Potenz des NENNERS dividiert. Ist die Zählerpotenz (=Zählergrad) größer als die Nennerpotenz, divergiert die Funktion, d.h., der Graph läuft gegen plus oder minus Unendlich. Sind Zähler- und Nennerpotenz gleich, gibt es eine waagerechte Grenzkurve (=Asymptote) parallel zur *x*-Achse, an die sich der Graph annähert. Ist die Zählerpotenz kleiner als die Nennerpotenz, nähert sich der Graph der *x*-Achse.]

a) Verhalten des Graphen für $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-6}{x+2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2x}{x}-\frac{6}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-\frac{6}{x}}{1+\frac{2}{x}}\right) = \frac{2-0}{1+0} = \underline{\underline{2}}$$

b) Verhalten des Graphen für $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-6}{x+2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\frac{2x}{x}-\frac{6}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2-\frac{6}{x}}{1+\frac{2}{x}}\right) = \frac{2+0}{1-0} = \underline{\underline{2}}$$

[Wenn *x* gegen Unendlich läuft, läuft $\frac{1}{x}$ gegen Null.]

[Das Ergebnis zeigt, daß es eine waagerechte Asymptote gibt, die bei 2 durch die *y*-Achse läuft.]

5. Verhalten an der Unstetigkeitsstelle

[Die Unstetigkeitsstelle ist bei *x*=-2. Diesem *x*-Wert wird sich einmal von links und dann von rechts genähert, indem einmal von -2 die Nullfolge h subtrahiert und dann die Nullfolge h addiert wird.]

a) linksseitiger Grenzwert (x = -2 - h)

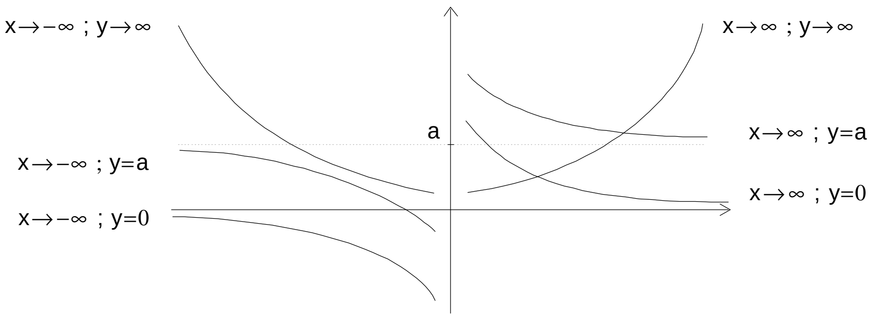
$$\lim_{h\to0}\left(\frac{2(-2-h)-6}{-2-h+2}\right) = \lim_{h\to0}\left(\frac{-4-2h-6}{-h}\right) = \lim_{h\to0}\left(\frac{-2h-10}{-h}\right) = \lim_{h\to0}\left(\frac{-(2h+10)}{-h}\right) = \lim_{h\to0}\left(\frac{2h+10}{h}\right) = \underline{\infty}$$

b) rechtsseitiger Grenzwert (x = -2 + h)

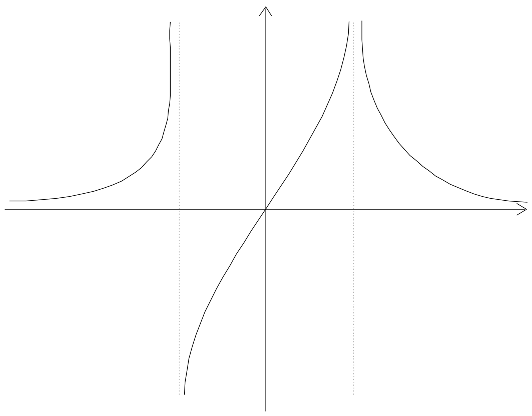
$$\lim_{h\to0}\left(\frac{2(-2+h)-6}{-2+h+2}\right) = \lim_{h\to0}\left(\frac{-4+2h-6}{h}\right) = \lim_{h\to0}\left(\frac{2h-10}{h}\right) = \underline{\underline{-\infty}}$$

[Wenn *h* gegen Null läuft, läuft $\frac{1}{h}$ gegen Unendlich.]

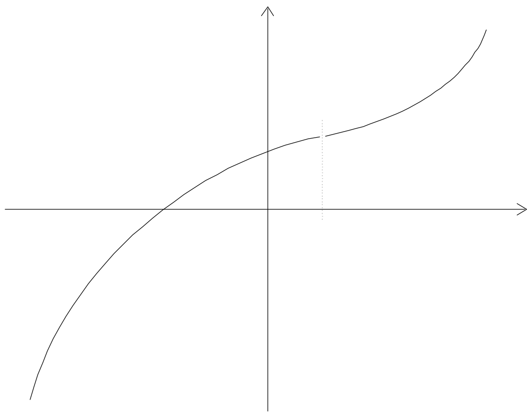
[Zum Verhalten am Rand des Definitionsbereiches:
Gebrochen-rationale Funktionen können divergieren (gegen Unendlich laufen) oder konvergieren (sich einem *y*-Wert annähern). Folgende Skizze zeigt Graphen mit unterschiedlichen Ergebnissen bei der Grenzwertberechnung für $x \to \pm\infty$.



Zum Verhalten an den Unstetigkeitsstellen:
Unstetigkeitsstellen (Nennernullstellen) können im Funktionsgraph als Pol oder Lücke auftreten. Kommt eine Nullstelle nur im Nenner, nicht aber im Zähler vor, ist es eine Polstelle. Kommt eine Nullstelle sowohl im Nenner, wie auch im Zähler vor, hat man eine Lücke. Bei einer Polstelle verschwindet der Graph nach plus oder minus Unendlich. Bei einer Lücke nähert sich der Graph einem bestimmten *y*-Wert.



Polstelle mit / ohne Vorzeichenwechsel



Lücke

Die Graphen sind bei Polstellen und Lücken unterbrochen.]

6. Extremwerte (Maximum, Minimum)

notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (x+2) - (2x-6) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x+4-2x+6}{(x+2)^2} = \frac{10}{(x+2)^2}$$

[Da der Zähler nicht Null werden kann, hat die 1.Ableitung keine Nullstellen, damit hat der Graph keine Extremwerte. Ansonsten können die Extremwerte an den Nullstellen des Zählers der 1.Ableitung liegen, was mit der hinreichenden Bedingung $f''(x) \neq 0$ nachgewiesen wird.]

7. Wendepunkte

notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$f''(x) = \frac{0 \cdot (x+2)^2 - 10 \cdot 2 \cdot (x+2) \cdot 1}{(x+2)^4} = \frac{-20}{(x+2)^3}$$

[Da der Zähler nicht Null werden kann, hat die 2.Ableitung keine Nullstellen, damit hat der Graph keine Wendepunkte. Ansonsten können die Wendepunkte an den Nullstellen des Zählers der 2.Ableitung liegen, was mit der hinreichenden Bedingung $f'''(x) \neq 0$ nachgewiesen wird.]

8. Wertetabelle

[Die *y*-Koordinate der Nullstellen ist =0, sonst läge der Punkt nicht auf der *x*-Achse, die *x*-Koordinate des Schnittpunktes mit der *y*-Achse ist =0, sonst läge der Punkt nicht auf der *y*-Achse.]

	Nullst.	Sp_y	Pol	Asy	linker-	rechter Rand
x	3	0	-2		-∞	∞
y	0	-3		2	2	2

9. Skizze