Kurvendiskussion

Glege 05/95

[Texte in eckigen Klammern [...] sind zusätzliche Kommentare.]

Diskutiert wird die ganz-rationale Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

1. Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

[Wenn eine Funktion an einer Stelle nicht definiert ist, handelt es sich z.B. um eine gebrochen-rationale Funktion, deren Nenner nicht Null werden darf, um eine Wurzelfunktion, deren Radikand nicht negativ werden darf, um eine Logarithmusfunktion, die für negative Argumente nicht definiert ist oder um die Tangensfunktion, die bei $\pi/2 \pm k\pi$ (für $k \in \mathbb{N}$) nicht definiert ist.]

2. Symmetrieeigenschaft

a) Achsensymmetrie (= Spiegelsymmetrie), Bedingung: $f(x) = f(-x)$

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 9x &= (-x)^3 - 6(-x)^2 + 9(-x) \\ &= -x^3 - 6x^2 - 9x \end{aligned}$$

falsche Aussage $\Rightarrow$ keine Achsensymmetrie

b) Punktsymmetrie, Bedingung: $f(x) = -f(-x)$

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 9x &= -\left[(-x)^3 - 6(-x)^2 + 9(-x)\right] \\ &= -\left[-x^3 - 6x^2 - 9x\right] \\ &= x^3 + 6x^2 + 9x \end{aligned}$$

falsche Aussage $\Rightarrow$ keine Punktsymmetrie

[Achsensymmetrisch sind nur ganz-rationale Funktionen, die <u>nur gerade Exponenten</u> haben. Eine additive Konstante ist erlaubt. Punktsymmetrisch sind nur ganz-rationale Funktionen, die <u>nur ungerade Exponenten</u> haben. Eine additive Konstante ist <u>nicht</u> erlaubt.]

3. Nullstellen, Bedingung: $f(x) = 0$

[Da keine additive Konstante (= Zahl ohne x) vorhanden ist, kann x ausgeklammert werden.]

$$0 = x^3 - 6x^2 + 9x = x(x^2 - 6x + 9)$$

$$x_1 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{0}$$

$$x_{2,3} = 3$$

[doppelte Nullstelle bei $x = 3$, das heißt, die x-Achse wird nur berührt, nicht geschnitten]

$N_1\ (0/0)$ $\qquad$ $N_{2;3}\ (3/0)$

4. Schnittpunkt mit der *y*-Achse, Bedingung: $f(0) = y$

$$0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 = 0$$

$SP_{\text{y-Achse}}$ (0/0)

5. Verlauf des Graphen am Rande des Definitionsbereiches

a) Verhalten des Graphen für $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty}\left[x^3\left(\frac{x^3}{x^3} - \frac{6x^2}{x^3} + \frac{9x}{x^3}\right)\right]$$ [höchste Potenz ausgeklammert!]

$$= \lim_{x \to \infty}\left[x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}\right)\right] = \infty \cdot (1 - 0 + 0) = \infty$$

Wenn x gegen ∞ läuft, läuft auch y gegen ∞. Der Graph läuft nach rechts oben (1. Quadrant).

[Wenn x gegen Unendlich läuft, läuft auch x^3 gegen Unendlich, 1 bleibt konstant, Brüche mit x im Nenner laufen gegen Null.]

b) Verhalten des Graphen für $x \to -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty}\left[x^3\left(\frac{x^3}{x^3} - \frac{6x^2}{x^3} + \frac{9x}{x^3}\right)\right]$$

$$= \lim_{x \to -\infty}\left[x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}\right)\right] = -\infty \cdot (1 - 0 + 0) = -\infty$$

Wenn x gegen $-\infty$ läuft, läuft auch y gegen $-\infty$. Der Graph kommt von links unten (3. Quadrant).

6. Ableitungen

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$f''(x) = 6x - 12$$
$$f'''(x) = 6$$

7. Extremwerte (Maximum, Minimum)

a) notwendige Bedingung: $f'(x)=0$

$f'(x)=3x^2-12x+9$
$0=3x^2-12x+9 \qquad |:3$
$0=x^2-4x+3$
$x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-3}$ $\qquad x_1 = 1$ und $x_2 = 3$

b) hinreichende Bedingung: $f''(x_{1,2})\neq 0$

$f''(x)=6x-12$
$f''(1)=6-12=-6<0$ $\qquad$ d.h. Maximum bei $x = 1$
$f''(3)=18-12=6>0$ $\qquad$ d.h. Minimum bei $x = 3$

c) y-Koordinaten:
$f(1)=1^3-6\cdot 1^2+9\cdot 1=1-6+9=4$ $\qquad$ d.h. Maximum (1/4)
$f(3)=3^3-6\cdot 3^2+9\cdot 3=27-54+27=0$ $\qquad$ d.h. Minimum (3/0)

8. Wendepunkt

a) notwendige Bedingung: $f''(x)=0$

$f''(x)=6x-12$
$0=6x-12 \qquad |+12 \quad |:6$
$x_1=2$

b) hinreichende Bedingung: $f'''(x_1)\neq 0$

$f'''(x)=6$
$f'''(2)=6>0$ $\qquad$ d.h. Wendepunkt bei $x = 2$ mit einer rechts-links Krümmung

c) y-Koordinate:

$f(2)=2^3-6\cdot 2^2+9\cdot 2=8-24+18=2$ $\qquad$ d.h. Wendepunkt (2/2)

[Die y-Koordinate der Nullstellen ist =0, sonst wäre es keine Nullstelle, die x-Koordinate des Schnittpunktes mit der y-Achse ist =0, sonst läge der Punkt nicht auf der y-Achse]

9. Wertetabelle

	Nullstellen		SP_y	Max.	Min.	WP	li.	re.
x	0	3	0	1	3	2	-∞	∞
y	0	0	0	4	0	2	-∞	∞

10. Skizze