Integrale (Erklärung)

Glege 10/93

1) Integrationsregel

Um die Stammfunktion zu bilden, wird zuerst der Exponent um 1 erhöht, dann dividiert man den Faktor vor dem *x* durch den erhöhten Exponenten.
Bei der Berechnung wird zuerst die obere Intervallgrenze in die Stammfunktion F(*x*) eingesetzt und der Funktionswert berechnet, danach das gleiche mit der unteren Intervallgrenze. Beide Funktionswerte werden voneinander subtrahiert. Ist das Ergebnis negativ, wird der Betrag gebildet. Die Abkürzung „FE“ steht für Flächeneinheiten.
Sind keine Intervallgrenzen angegeben, wird hinter die Stammfunktion die Integrationskonstante „+C“ geschrieben.

Schreibweise: $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$

Beispiel: $\int_1^2 3x^2\,dx = \left[x^3\right]_1^2 = 2^3 - 1^3 = 8 - 1 = 7 \text{ FE}$

Der Exponent 2 wird auf 3 erhöht, dann wird der Faktor 3 durch den neuen Exponent 3 geteilt. In die Stammfunktion wird die obere Grenze 2, dann die untere Grenze 1 eingesetzt und die Differenz berechnet.

2) Regel

Über Nullstellen darf nicht integriert werden, da Flächen oberhalb der *x*-Achse in der Rechnung positive Werte bilden, unterhalb der *x*-Achse aber negative. Liegt eine Nullstelle innerhalb des zu berechnenden Intervalls, muß diese als Zwischenintervallgrenze genommen werden und zweimal integriert werden, d. h. die erste Integration von der unteren Grenze bis zur Nullstelle, die zweite Integration von der Nullstelle bis zur oberen Grenze.

3) Summenregel

Alle Summanden einer Funktion werden einzeln integriert.

Summenregel: $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

4) Faktorregel

Konstante Faktoren können vor das Integralzeichen geschrieben werden. Eventuell kann die Konstante zuerst ausgeklammert werden. Ein vorgestelltes Minuszeichen ist der Faktor (–1) !

Faktorregel: $\int c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx$

5) Partielle Integration

Wenn die gesamte Funktion aus einem Produkt zweier Funktionen besteht, muß partiell integriert werden. Wichtig ist die Zuordnung von *u* und *v*'. *v*' muß als Ableitung angesehen werden. *u* ist die Funktion, die bei ein- oder mehrmaligem Ableiten das *x* verliert. Gibt es eine solche Funktion nicht, wird die Aufgabe nach dem „Phönix“-Prinzip gelöst: Nach zweimaligem Integrieren steht rechts dasselbe Integral, wie links. Dieses Integral wird nach links gebracht und die Gleichung durch 2 dividiert.

Regel: $\int u \cdot v' \quad = \quad [u \cdot v] - \int u' \cdot v$

Beispiel: $f(x) = 2x \cdot e^x$;setze $2x = u$ und $e^x = v'$

$$\int 2x \cdot e^x \; dx \quad = \quad \left[2x \cdot e^x\right] - \int 2 \cdot e^x \; dx \quad = \quad \left[2x \cdot e^x\right] - 2 \cdot \left[e^x\right] + C$$

6) Integration durch Substitution

Bei verketteten Funktionen muss substituiert werden. Meistens wird die innere Funktion (Radikand einer Wurzel, Argument des Sinus usw.) durch „*u*“ ersetzt. Jetzt muss die Integrationsvariable „*dx*“ in „*du*“ durch ableiten umgerechnet werden. Danach werden die neuen Integrationsgrenzen der „*u*-Funktion“ berechnet.

Beispiel: Funktion: $f(x) = \sqrt{2x+1}$;im Intervall: [0;2]

a) Substitution: $u = 2x + 1$; dann ist $u' = 2$

b) Umrechnung der Integrationsvariablen:

$u' = \frac{du}{dx} = 2$;nach *dx* aufgelöst: $dx = \frac{1}{2} du$

„*dx*“ wird durch „½*du*“ ersetzt, der Faktor „½“ kann nach der Faktorregel vor das Integral gezogen werden.

c) Umrechnung der Grenzen:

Die Grenzen werden mit der Funktion „*u*“ neu berechnet: $u = 2x$-1

Für die neue, obere Grenze gilt: $u(2) = 2 \cdot \; 2 + 1 = 5$

Für die neue, untere Grenze gilt: $u(0) = 2 \cdot \; 0 + 1 = 1$

d) Rechnung: $\int_0^2 \sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^5 \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[\sqrt{u^3}\right]_1^5 = \frac{1}{3}\left[\sqrt{5^3} - \sqrt{1^3}\right] = \frac{1}{3}\left[\sqrt{125} - \sqrt{1}\right] FE$

Beachte: $\sqrt{u}$ ist $u^{\frac{1}{2}}$, integriert $\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}$, als Wurzel $\frac{2}{3}\sqrt{u^3}$. Die Grenzen werden wie gewohnt in die Stammfunktion eingesetzt (jetzt für *u*) und die Fläche berechnet.

7) Sonderfall

Ist der Zähler eines Bruches die Ableitung des Nenners, ist die Stammfunktion der natürliche Logarithmus (**l**ogarithmus **n**aturalis) des Nenners. Eventuell kann man durch Erweitern des Bruches diesen Sonderfall bilden.

Regel: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx \quad = \quad \ln(f(x)) + C$