Hypothesentest oder Signifikanztest

Glege 03/96

Beispiel:

Ein Würfel soll daraufhin geprüft werden, ob die „6" mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = \frac{1}{6}$ angezeigt wird. Dazu wird 100mal gewürfelt. Es wird ein Fehler von ±5% zugelassen. Bei dem Test wurde 20mal die „6" gezählt.

Begriffe:

Nullhypothese	Wahrscheinlichkeit, mit der X eintritt	H_0: $p = \frac{1}{6}$
Gegenhypothese	Wahrscheinlichkeit, mit der X nicht eintritt	H_1: $p \neq \frac{1}{6}$
Prüfvariable	Stichprobenumfang	X = 100 Wiederholungen
Ablehnungsbereich	Werte für Anzahlen der „6" außerhalb des ±5% Bereichs	K
Annahmebereich	Werte für Anzahlen der „6" innerhalb des ±5% Bereichs	$\overline{K}$
Irrtumswahrscheinlichkeit	Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese zu verwerfen, obwohl sie zutrifft (Fehler 1.Art).	α
Wahrscheinlichkeit	,dass die Nullhypothese angenommen wird, obwohl sie nicht zutrifft (Fehler 2.Art).	β
Statistische Sicherheit	$1-\alpha$	

Berechnung:

Nullhypothese und Gegenhypothese: $H_0 = \frac{1}{6}$ $H_1 \neq \frac{1}{6}$

Stichprobenumfang: $n = 100$

Irrtumswahrscheinlichkeit: $\alpha = \pm 0{,}05 = 0{,}1$ weil die zulässige Abweichung = ±5% ist

für den Ablehnungsbereich gilt:

maximale Anzahl der „6" nach kumulierter Binomialtabelle für

$n = 100$, $p = \frac{1}{6}$, $P(X \leq k_{\min}) \leq 0{,}05$, ergibt: $k = 10$

minimale Anzahl der „6" = nach kumulierter Binomialtabelle für

$n = 100$, $p = \frac{1}{6}$, $P(X \geq k_{\max}) \leq 0{,}05$ bzw. $P(X \leq k_{\max}-1) \leq 0{,}95$

ergibt: $k_{\max} - 1 = 23$ bzw. $K_{\max} = 24$

Ergebnis:

Liegt die Anzahl der „6" bei 100 Wiederholungen zwischen 11 und 23, so ist der Würfel bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 10% in Ordnung. Da die Anzahl beim Test 20 war, wird der Würfel zugelassen.

Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2.Art:

Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2.Art kann nur dann berechnet werden, wenn die tatsächliche Wahrscheinlichkeit bekannt ist, mit der eine „6“ angezeigt wird. Diese Wahrscheinlichkeit sei $p = 0{,}2$, dann gilt für die kumulierte Binomialtabelle:

$n = 100$, $p = 0{,}2$, $k = 10$, ergibt: $P(X \leq 10) = 0{,}0057$
$n = 100$, $p = 0{,}2$, $k = 24$, ergibt: $P(X \geq 24)$
d.h. $n = 100$, $p = 0{,}2$, $k - 1 = 23$, ergibt: $1 - P(X \leq 23) = 1 - 0{,}8109 = 0{,}1891$
$P(X \leq 10) + P(X \geq 24) = 0{,}0057 + 0{,}1891 = 0{,}1948$ d.h. $b = 19{,}48\%$

Aufgabe 1:

Bei einem Würfel soll die Wahrscheinlichkeit, eine „1“ oder „6“ zu bekommen, $p = \frac{1}{3}$ sein. Bei einem Test wurde 100mal gewürfelt.

a) Welcher Ablehnungsbereich ergibt sich bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $a = 0{,}05$?
b) Stimmt die Hypothese, wenn beim Test 25mal die „1“ oder „6“ angezeigt wurde?
c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2.Art, wenn die tatsächliche Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}4$ ist?

Aufgabe 2:

Eine Partei erhielt bei der letzten Wahl 60% der stimmen. Bei einer aktuellen Umfrage erhielt sie von 100 Personen 48 Zustimmungen. Hat sich der Stimmenanteil geändert, wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit 5% beträgt?
Ergebnis: Der Stimmenanteil hat sich geändert. Der Ablehnungsbereich liegt zwischen 0 und 49 sowie zwischen 70 und 100.

Aufgabe 3:

Die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne mit weißen und schwarzen Kugeln eine weiße zu ziehen, soll $p = 0{,}4$ betragen.

a) Welcher Ablehnungsbereich ergibt sich für 50 Ziehungen mit Zurücklegen und einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $a = 0{,}05$?
b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2.Art, wenn die tatsächliche Wahrscheinlichkeit für die Ziehung einer weißen Kugel $p = 0{,}2$ beträgt?