Grenzwerte

Unter Grenzwert versteht man den Wert, an den sich der Funktionswert *y* annähert, wenn die Variable *x* sich einem bestimmten Wert oder Unendlich nähert.

Beispiel 1:
gegeben sei die Funktion: $f(x) = 2x$
wenn *x* immer größer wird, so wird auch *y* immer größer
oder wenn *x* gegen Unendlich läuft, so läuft auch *y* gegen Unendlich
oder der Grenzwert (= Limes) von 2*x* für *x* gegen Unendlich ist Unendlich
mathematische Schreibweise: $\lim\limits_{x\to\infty}(2x) = \infty$

Diese Funktion hat ein **divergentes** (entfernendes) Verhalten.

Beispiel 2:
gegeben sei die Funktion: $f(x) = \frac{1}{x}$
wenn *x* immer größer wird, dann nähert sich *y* immer mehr der Null
oder wenn *x* gegen Unendlich läuft, so läuft *y* gegen Null
oder der Grenzwert (= Limes) von 1 durch *x* für *x* gegen Unendlich ist Null
mathematische Schreibweise: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Diese Funktion hat ein **konvergentes** (annäherndes) Verhalten.

Bei der Untersuchung von gebrochen-rationalen Funktionen werden Grenzwerte bestimmt, um das Verhalten am Rand des Definitionsbereiches und an den Unstetigkeitsstellen (= Nennernullstellen) zu erfahren. Dazu lässt man *x* gegen plus und minus Unendlich oder von links und rechts gegen die Unstetigkeitsstelle laufen.

Am Rand des Definitionsbereiches kann ein Funktionsgraph gegen plus oder minus Unendlich laufen (divergente Funktion), oder er nähert sich einem bestimmten *y*-Wert, z.B. der Null an (konvergente Funktion).

Gebrochen-rationale Funktionen können Unstetigkeitsstellen haben. Gibt es *x*-Werte, bei denen der Nenner Null wird (= Nennernullstellen), müssen diese aus dem Definitionsbereich herausgenommen werden, da durch Null nicht dividiert werden darf. Nun lässt man *x* gegen diese Nennernullstellen laufen, um das Verhalten an den Unstetigkeitsstellen zu ermitteln. Dabei muss sich *x* einmal von links (= linksseitiger Grenzwert) und einmal von rechts (= rechtsseitiger Grenzwert) der Nullstelle annähern. Dazu subtrahiert bzw. addiert man eine Nullfolge „*h*“ von bzw. zu der Nennernullstelle. Lässt man nun „*h*“ gegen Null laufen, läuft der Wert „*x*–*h*“ bzw. „*x*+*h*“ gegen die Nennernullstelle *x*. Da *x* selbst nicht eingesetzt werden darf, werden Werte eingesetzt, die sehr nahe bei diesem *x*-Wert liegen. Bei dieser Untersuchung sind zwei verschieden Arten von Lösungen möglich. Ist der Grenzwert plus oder minus Unendlich, spricht man von einer **Polstelle**, ist der Grenzwert eine bestimmte Zahl, spricht man von einer **Lücke**.

Beispiel 3:

gegeben sei die Funktion: $f(x) = \dfrac{2x+4}{x^2-4}$ $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$

Bei dieser Funktion darf x nicht -2 oder +2 sein, weil dann durch Null dividiert werden würde. Diese Stellen heißen **Unstetigkeitsstellen** der Funktion. An diesen Stellen ist der Funktionsgraph unterbrochen. Es folgen drei Untersuchungen:

1. Das Randverhalten (Limes für x gegen plus und minus Unendlich)
2. Das Verhalten an der Unstetigkeitsstelle $x = -2$ (links und rechts der Stelle)
3. Das Verhalten an der Unstetigkeitsstelle $x = +2$ (links und rechts der Stelle)

1. Das Randverhalten *oder* Verhalten am Rand des Definitionsbereiches

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+4}{x^2-4}\right)$

Zähler und Nenner durch die höchste Potenz des Nenners (hier: x^2) teilen. Alle Brüche mit x im Nenner laufen für $x\to\infty$ gegen Null.

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}\right) = \frac{0+0}{1-0} = \frac{0}{1} = \underline{\underline{0}}$$

b) Entsprechend wird der linke Rand berechnet ($x\to-\infty$).
Das Ergebnis ist ebenfalls =0.

2. Verhalten an der Unstetigkeitsstelle *x* = –2

a) **Links**seitiger Grenzwert bei $x_1 = -2$ ($x = -2-h$ einsetzen)

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{2(-2-h)+4}{(-2-h)^2-4}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{-4-2h+4}{4+4h+h^2-4}\right) =$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{-2h}{4h+h^2}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{-2h}{(4+h)h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{-2}{4+h}\right) = \left(\frac{-2}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)$$

b) Entsprechend wird der **rechts**seitige Grenzwert bei $x_1 = -2$ berechnet ($x = -2+h$ einsetzen).
Das Ergebnis ist ebenfalls $= -\frac{1}{2}$

3. Verhalten an der Unstetigkeitsstelle *x* = 2

a) **Links**seitiger Grenzwert bei $x_2 = +2$ ($x = 2 - h$ einsetzen)

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{2(2-h)+4}{(2-h)^2-4}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{4-2h+4}{4-4h+h^2-4}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{8-2h}{-4h+h^2}\right) = -\infty$$

Hinweis: Der Zähler läuft gegen 8. Im Nenner bildet der lineare Anteil ($-4h$) für $h\to 0$ betragsmäßig stets größere Werte als der quadratische Ausdruck (h^2), womit der Nenner stets negativ ist. Plus geteilt durch Minus ergibt ein negatives Ergebnis.

b) Entsprechend wird der **rechts**seitige Grenzwert bei $x_2 = +2$ berechnet ($x = 2 + h$ einsetzen), hier ist das Ergebnis $+\infty$.

Skizze: