Lösungsmethode:

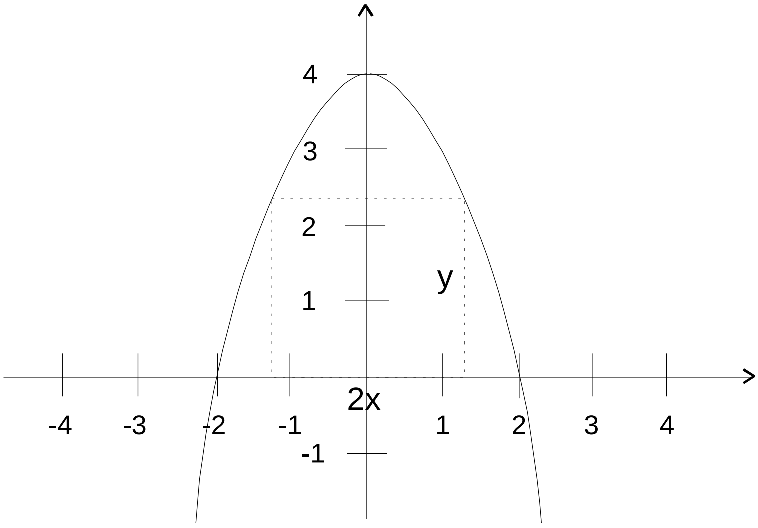
1. Aufstellen der Hauptbedingung (HB)
   In der Hauptbedingung steht eine Berechnungsformel für die Größe, die minimiert oder maximiert werden soll.
   Beispiel: Soll die Fläche eines Rechtecks extrem werden, lautet die Hauptbedingung:
   HB: $A = a \cdot b$

2. Aufstellen der Nebenbedingung (NB)
   Wenn die HB mehr als eine Unbekannte enthält, müssen eine oder mehrere NBs aufgestellt werden. Bei n Variablen in der HB müssen (n–1) NBs aufgestellt werden. Die NBs enthalten Zahlenwerte aus dem Text oder im Text angegebene Funktionen, unter deren Graphen z.B. eine Fläche einbeschrieben werden soll.
   Textbeispiel 1: Die Summe der beiden Seiten beträgt 50m.
   ergibt die NB: $50 = a + b$
   Textbeispiel 2: Unter dem Graph der Funktion $f(x) = 2x^2$ soll ein...
   ergibt die NB: $y = 2x^2$

3. Aufstellen der Zielfunktion $f(x)$ und der 1. und 2. Ableitung
   Durch Einsetzen der NBs in die HB können alle Unbekannten bis auf eine eliminiert werden. Nach dem Vereinfachen der HB kann auch wieder die Unbekannte durch x ersetzt werden. Nun hat man eine Zielfunktion der Form $f(x) = ax^n +...$ Von der Zielfunktion wird nun die erste und zweite Ableitung gebildet.

4. Berechnung des Extremwertes
   a) notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$
   Die Nullstellen der ersten Ableitung der Zielfunktion sind mögliche Extremwerte. Wenn festgestellt wird, welcher Definitionsbereich (= Menge der möglichen x-Werte) aufgrund der Aufgabenstellung vorgegeben ist, fallen manchmal einige Nullstellen weg.
   b) hinreichende Bedingung: $f''(x_{\text{Extr}}) \neq 0$
   Die Nullstellen der ersten Ableitung (x-Werte), die im Definitionsbereich der Aufgabe liegen, werden in die zweite Ableitung eingesetzt.
   • Ergeben sich positive Funktionswerte der zweiten Ableitung ($f''(x_{\text{Extr}}) > 0$), liegt ein Minimum vor.
   • Ergeben sich negative Funktionswerte der zweiten Ableitung ($f''(x_{\text{Extr}}) < 0$), liegt ein Maximum vor.
   c) y – Koordinaten: $f(x_{\text{Extr}})$
   Die Lösung für den Extremwert (x-Wert) wird in die Ausgangsfunktion (Zielfunktion) eingesetzt, um die y - Koordinaten zu berechnen. Diese gibt die Größe des Extremalwertes, z.B. ein größtes Volumen oder eine kleinste Fläche an.

Beispiel:
Unter der Parabel der Funktion $y = 4 - x^2$ soll ein größtmögliches Rechteck einbeschrieben werden, das von der x-Achse begrenzt wird. Welchen Flächeninhalt hat das Rechteck?
Skizze:



Rechnung:

1. Aufstellen der Hauptbedingung (HB)
HB: $A = 2x \cdot y$

2. Aufstellen der Nebenbedingung (NB)
NB: $y = -x^2 + 4$

3. Aufstellen der Zielfunktion $f(x)$ und der 1. und 2. Ableitung
Die NB wird in die HB eingesetzt:
Zielfunktion: $A(x) = 2x \cdot (-x^2 + 4) = -2x^3 + 8x$
bzw. $f(x) = -2x^3 + 8x$
1. Ableitung: $f'(x) = -6x^2 + 8$
2. Ableitung $f''(x) = -12x$

4. Berechnung des Extremwertes
a) notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$0 = -6x^2 + 8$$

$$6x^2 = 8$$

$$x^2 = \frac{4}{3}$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}$$

b) hinreichende Bedingung: $f''(x_{\text{Extr}}) \neq 0$

$$f''(\frac{2}{3}\sqrt{3}) = -12 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3} < 0 \qquad \text{d.h. Maximum für } x = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

c) y - Koordinaten: $f(x_{\text{Extr}})$

$$f\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = -2 \cdot \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^3 + 8 \cdot \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{32}{3}\sqrt{3}\ FE$$