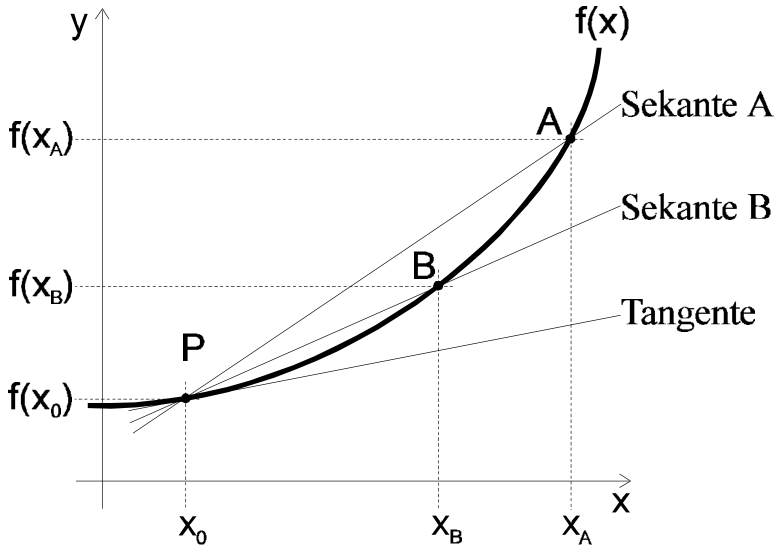
Einführung in die Differentialrechnung

Glege 05/94

In der Differentialrechnung interessiert die Steigung von Kurven. Eine Gerade hat eine konstante Steigung, bei einer Kurve ist die Steigung von Punkt zu Punkt verschieden und damit von x abhängig. In der Skizze soll die Steigung in P bestimmt werden. Dazu legt man eine Sekante durch P und einem Hilfspunkt A. Die Steigung der Sekante A hat im Vergleich zur tatsächlichen Steigung in P einen zu großen Wert. Nähern wir unseren Hilfspunkt A an P heran, so wird aus ihm B. Eine Sekante durch P und B hat ebenfalls eine zu große Steigung, der Fehler ist aber schon geringer geworden. Je weiter der Hilfspunkt an P herangeschoben wird, desto genauer stimmt die Sekantensteigung mit der Tangentensteigung überein. Die exakte Steigung in P erhält man schließlich über die Grenzwertbildung, bei der der Hilfspunkt in P hineinläuft bzw. der Abstand zwischen x_0 und x_B gegen Null geht.



Differenzenquotienten:

1.Formel: $m_s = \dfrac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$ (Punkt und Hilfspunkt)

2.Formel: $m_s = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x}$ (mit der Nullfolge h) ; h = Abstand von x_0 bis x_B

mit diesen Formeln wird die Sekantensteigung berechnet (vgl. Steigungsberechnung von Geraden)

Differentialquotienten:

1.Formel: $m_t = \lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \right)$ $= f'(x)$ = 1.Ableitung von $f(x)$

2.Formel: $m_t = \lim\limits_{h \to 0} \left(\dfrac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} \right)$ $= f'(x)$ = 1.Ableitung von $f(x)$

mit diesen Formeln wird die Tangentensteigung durch Grenzwertbildung bestimmt

Aufgabe 1)

Bestimme die Steigung m der Funktionen a) bis h) im Punkt P = $(2/f(2))$. Setze die Koordinaten in Formel zur Berechnung des Differentialquotienten 1 oder 2 ein und vereinfache soweit, daß der Grenzwert gebildet werden kann. Dazu darf im Nenner bei der Grenzwertbildung keine Null mehr stehen. Nach der Grenzwertbildung ist das Ergebnis eine Zahl, die die Steigung in P angibt.

Aufgabe 2)

Bestimme die Ableitung der Funktionen a) bis h). Setze die Koordinaten von Punkt P = $(x/f(x))$ in Formel 1 oder 2 zur Berechnung des Differentialquotienten allgemein ein und vereinfache soweit, daß der Grenzwert gebildet werden kann. Dazu darf im Nenner bei der Grenzwertbildung keine Null mehr stehen. Nach der Grenzwertbildung ist das Ergebnis eine Funktion, die je nach eingesetzter x-Koordinate die dazugehörige Steigung als Ableitungswert (= y') ausgibt. y' oder $f\,'(x)$ heißt 1.Ableitung von $f(x)$.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x^2 + 1$

c) $f(\mathrm{x}) = x^2 - 4$

d) $f(x) = 2\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x}$

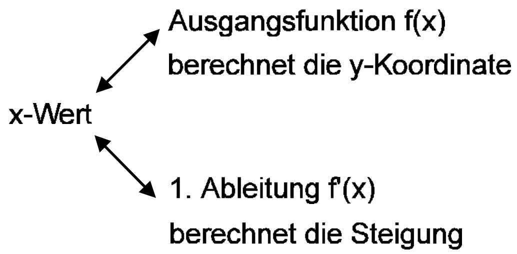
e) $f(x) = \sqrt{x}$

f) $f(x) = x^2 + x - 3$

g) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

h) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

☞ Der Funktionswert der Ausgangsfunktion f(x) ist eine y-Koordinate des Punktes (x/f(x)).
Der Funktionswert der 1.Ableitung f'(x) ist die Steigung des Graphen im Punkt (x/f(x)).



Aufgabe 3)

Bestimme den Punkt der Funktion $f(x) = x^2 - x$ mit der Steigung $m = 5$. Zeichne die Funktion in ein Koordinatensystem und die Tangente an den berechneten Punkt.

Anleitung: Rechne genau wie in Aufgabe 2), setze dann $f\,'(x) = 5$ und berechne x. Dieses ist die x-Koordinate des gesuchten Punktes. Die y-Koordinate wird berechnet, indem das x in die Ausgangsfunktion $f(x)$ eingesetzt und y berechnet wird.

Aufgabe 4)

Bestimme den Scheitelpunkt der Parabel $f(x) = x^2 - 2x + 4$.

Anleitung: Berechne die Aufgabe genau wie Aufgabe 2), setze dann $f\,'(x) = 0$, denn im Scheitelpunkt ist die Steigung $m = 0$, und berechne x. Dieses ist die x-Koordinate des gesuchten Punktes. Die y-Koordinate wird berechnet, indem das x in die Ausgangsfunktion $f(x)$ eingesetzt und y berechnet wird.