Bayes / Totale Wahrscheinlichkeit

Glege 05/00

Theorie:

- Sind die Einzelwahrscheinlichkeiten bekannt, werden bedingte Wahrscheinlichkeiten über den Satz von Bayes berechnet:
  $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
- Sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten bekannt, werden die Einzelwahrscheinlichkeiten über den Satz der totalen Wahrscheinlichkeit
  $$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + ...$$
  und dem Multiplikationssatz für bedingte Wahrscheinlichkeiten
  $$P(A_1 \cap ... \cap A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cdot ...$$

Beispiel zum Satz von Bayes:

Die Produktion eines Produktes läuft über drei parallele Fertigungsstraßen. Die fertigen Teile werden im Lager gesammelt. Für die drei Straßen gelten folgende Werte:

Straße 1:	750 Teile / Stunde	80% sind einwandfrei
Straße 2:	800 Teile / Stunde	85% sind einwandfrei
Straße 3:	1000 Teile / Stunde	65% sind einwandfrei

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig herausgenommenes intaktes Bauteil von der ersten Fertigungsstraße stammt.

Lösung mit Satz von Bayes:

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + P(B|A_3) \cdot P(A_3)}$$

$$= \frac{\frac{0{,}8 \cdot 750}{750 + 800 + 1000}}{\frac{0{,}8 \cdot 750}{2550} + \frac{0{,}85 \cdot 800}{2550} + \frac{0{,}65 \cdot 1000}{2550}}$$

$$= \frac{0{,}8 \cdot 750}{0{,}8 \cdot 750 + 0{,}85 \cdot 800 + 0{,}65 \cdot 1000}$$

$$= \underline{\underline{0{,}31}}$$